по математическому анализу
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.② Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y(x) = \frac{(x^2)^{\frac{1}{\sin x}}}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \ln \operatorname{tg} x}.$$

2. Вычислить интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 4x - 2}{(x+2)(3x^2 + 2x + 2)}\, dx$, б) ⑤ $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

3.③ Найти $y^{(11)}$, если

$$y = (x^2 - 3x)\ln x.$$

4.④ Найти y''_{xx} при тех значениях t, для которых $y'_x = 0$, если

$$x(t) = \frac{e^t}{t+1}, \quad y(t) = t^2 e^t.$$

5.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ до $o((x-1)^{2n+1})$ функцию

$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$$

6.⑤ Найти предел:

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\operatorname{ch} 3x} + \frac{9}{8} \ln(1 - \arcsin 2x^2) \right)^{\frac{1}{x^2(1-\cos x)}}.$$

7.⑥ Найти предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1 + \sin 5x} - e^{x - \frac{5}{2}x^2}}{\frac{x \operatorname{ch} x}{2e^x - 1} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} x}{1+2x}}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 51

Семестровая контрольная работа по математическому анализу 1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1. ② Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y(x) = \frac{(1+x)^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{arctg} 2^x}{\ln(2+e^x)}.$$

2. Вычислить интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 8x + 7}{(x+3)(2x^2 - 3x + 2)}\,dx$, б) ⑤ $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{(x^2 - 1)^3}\,dx$.

3. ③ Найти $y^{(12)}$, если

$$y = (x^2 + 6)\sin 5x \cos 3x.$$

4. ④ Найти y''_{xx} при тех значениях t, для которых $y'_x = -1$, если

$$x(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t, \quad y(t) = \frac{1}{\sin t} + \sin t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

5. ④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ до $o((x-3)^n)$ функцию

$$y = \frac{x-2}{3^x}.$$

6. ⑤ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\ln(1+x)}{1-2x} + \frac{2-5x}{2-3x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[12]{1+\operatorname{tg}^3 x} - 1}}.$$

7. ⑥ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(xe^x) - x\sqrt[3]{1+3x}}{\ln(x+\cos^2 x) - \sin\left(\operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x^2\right)}.$$

Заказ Тираж 200

по математическому анализу
1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1. ② Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y(x) = \frac{\arccos\sqrt{\frac{2}{x}}}{(\log_3(1+x^2))^{\operatorname{tg} 2x}}.$$

---

2. Вычислить интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int \frac{9x^2-3x+4}{(x-2)(5x^2-2x+1)}\,dx$, б) ⑤ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

---

3. ③ Найти $y^{(30)}$, если

$$y = (x^2-4x)\operatorname{ch}^2(x+3).$$

---

4. ④ Найти y''_{xx} при тех значениях t, для которых $y'_x = -1$, если

$$x(t) = \sin^2 t + \ln\cos^2 t, \quad y(t) = \cos^2 t + \ln\sin^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

---

5. ④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ до $o((x+1)^n)$ функцию

$$y = \frac{9+3x^2}{2-x-x^2}.$$

---

6. ⑤ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} - \frac{1}{12}\ln(2-\cos 2x)\right)^{\frac{4}{\operatorname{arctg}^4 x}}.$$

---

7. ⑥ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sqrt[3]{\operatorname{ch} x} + \ln(1-2x+2x^3) + 2x^2}{x\operatorname{ch}(\sin x) - \operatorname{tg}\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}}.$$

Семестровая контрольная работа по математическому анализу 1 семестр 2005/2006 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.② Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2+2x) + (\cos x)^{\sqrt{x}}}{\operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

2. Вычислить интегралы:

а) ④ $\displaystyle\int \frac{4x^2-5x+6}{(x-3)(2x^2+2x+3)}\,dx$, б) ⑤ $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\arccos x\,dx$.

3.③ Найти $y^{(40)}$, если

$$y = \frac{3x^2+5x-8}{x^2-2x}.$$

4.④ Найти y''_{xx} при тех значениях t, для которых $y'_x = 0$, если

$$x(t) = t^3 - 3\ln|t|, \quad y(t) = t^2 - 2\ln|t|.$$

5.④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ до $o((x+1)^n)$ функцию

$$y = (x+4)\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right).$$

6.⑤ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[5]{\cos^3 x} + \frac{3}{10}\sin^2 x\right)^{\frac{16}{3(1-\operatorname{ch}2x)^2}}.$$

7.⑥ Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(xe^{-x^2}) - \frac{\ln(1+x^2-x^4)}{x}}{\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{\cos x - x}} - \sin\frac{x^2}{\ln(1+x)}}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 54

2. а) ④

$$\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right) - \frac{8}{15}\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}\sqrt{5}\left(x+\frac{1}{3}\right) + C;$$

б) ⑤ $\dfrac{-t}{\cos t} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t} + C$, где $t = \mathrm{arcctg}\,x$.

3.③ $y^{(n)} = (x^2-3x)(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-(n-1))x^{-n} + n(2x-3)(-1)(-2)\cdot\ldots\times$
$\times(-(n-2))x^{-(n-1)} + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(-1)(-2)\ldots(-(n-3))x^{-(n-2)}$;
$y^{(11)} = \dfrac{8!}{x^{10}}(2x+27)$.

4.④ $y'_x = (t+2)(t+1)^2$; $y''_{xx} = \dfrac{(t+1)^3(3t+5)}{te^t}$; $y''_{xx}|_{t=-2} = -\dfrac{1}{2}e^2$.

5.④ $y =$

$$= \frac{1}{2}\left(-2 + \left(1 - \frac{2C^1_{-1/2}}{4}\right)(x-1)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{-2C^k_{-1/2}}{4^k} + \frac{C^{k-1}_{-1/2}}{4^{k-1}}\right](x-1)^{2k}\right) +$$
$$+ o((x-1)^{2n+1}).$$

6.⑤ $e^{-99/16}$; Основание степени $= \left(1 + \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{27}{32}x^4 + o(x^5)\right) +$
$+ \left(-\dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{9}{4}x^4 + o(x^5)\right) = 1 - \dfrac{99}{32}x^4 + o(x^5)$.

7.⑥ $-\dfrac{25}{2}$; Числитель: $\left(1 + x - 2x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 + o(x^3)\right) -$
$-\left(1 + x - 2x^2 - \dfrac{7}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \dfrac{25}{6}x^3 + o(x^3)$; Знаменатель:
$\left(x - 2x^2 + \dfrac{7}{2}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x - 2x^2 + \dfrac{23}{6}x^3 + o(x^3)\right) = -\dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

---

2. а) ④

$$2\ln|x+3| - \frac{1}{4}\ln\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) + \frac{1}{14}\sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{7}\sqrt{7}\left(x-\frac{3}{4}\right) + C;$$

б) ⑤ $-\frac{1}{4}\left(\frac{t}{\cos^4 t} - \mathrm{tg}\,t - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,t\right) + C$, где $t = \arcsin x$.

3.③ $$y^{(n)} = (x^2+6)\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right)\cdot 2^n + \sin\left(8x+\frac{\pi}{2}n\right)\cdot 8^n\right) +$$
$$+ n\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\cdot 2^{n-1} + \sin\left(8x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)\cdot 8^{n-1}\right] +$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\cdot 2^{n-2} + \sin\left(8x+\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\cdot 8^{n-2}\right].$$

4.④ $y'_x = -\,\mathrm{ctg}^5\,t$; $y''_{xx} = 5\frac{\cos^6 t}{\sin^9 t}$; $y''_{xx}|_{t=\pi/4} = 10\sqrt{2}$.

5.④ $$y = \frac{1}{3^3}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\ln^k 3}{k!}(-1)^k + \frac{\ln^{k-1} 3}{(k-1)!}(-1)^{k-1}\right](x-3)^k\right) + o((x-3)^n).$$

6.⑤ e^{11}; Основание степени $= \left(x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{19}{6}x^3 + o(x^3)\right) +$
$$+\left(1 - x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x^3 + o(x^3)\right) = 1 + \frac{11}{12}x^3 + o(x^3).$$

7.⑥ $\frac{10}{7}$; Числитель:
$$\left(x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right) - (x + x^2 - x^3 + o(x^3)) = \frac{5}{3}x^3 + o(x^3);$$
Знаменатель:
$$\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{7}{6}x^3 + o(x^3).$$

---

2. а) ④ $2\ln|x-2|+\dfrac{3}{5}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}x\right)-\dfrac{1}{10}\ln\left(\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{25}\right)+C$;

б) ⑤ $-t\operatorname{ctg}t+\ln|\sin t|-\dfrac{1}{2}t^2+C$, где $t=\operatorname{arctg}x$.

3.③ $y^{(30)}=(x^2+4x)\cdot\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}2(x+3))\cdot 2^{30}+30(2x+4)\cdot\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh}2(x+$
$+3))\cdot 2^{29}+\dfrac{30\cdot 29}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}2(x+3))\cdot 2^{28}$.

4.④ $y'_x=-\operatorname{ctg}^4 t$; $y''_{xx}=-2\dfrac{\cos^4 t}{\sin^8 t}$; $y''_{xx}|_{t=-\pi/4}=-8$.

5.④ $y=3-\dfrac{3x-15}{x^2+x-2}=3+\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{7}{x+2}=(3-2-7)+$
$+\sum\limits_{k=1}^{n}\left[(-2)\cdot\dfrac{1}{2^k}+(-7)(-1)^k\right](x+1)^n+o((x+1)^n)$.

6.⑤ $e^{29/30}$; Основание степени $=\left(1+\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{7}{360}x^4+o(x^5)\right)-$
$-\left(\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{2}{9}x^4+o(x^5)\right)=1+\dfrac{29}{120}x^4+o(x^5)$.

7.⑥ 2; Числитель: $\left(2x+\dfrac{1}{3}x^2+o(x^4)\right)+\left(-2x-2x^2-\dfrac{2}{3}x^3+o(x^4)\right)+$
$+2x^2=-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)$; Знаменатель:
$\left(x+\dfrac{1}{2}x^3+o(x^4)\right)-\left(x+\dfrac{2}{3}x^3+o(x^4)\right)=-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$.

---

2. а) ④

$$\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right) - \frac{2}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{5}\sqrt{5}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C;$$

б) ⑤ $-\frac{1}{16}t^2 + \frac{1}{32}t\sin 4t + \frac{1}{128}\cos 4t + C$, где $t = \arccos x$.

3.③ $$y^{(n)} = (3x^2+5x-8)\cdot\frac{1}{2}[(-1)(-2)\ldots(-n)]\left((x-2)^{-(n+1)} - x^{-(n+1)}\right) +$$
$$+ n(6x+5)\cdot\frac{1}{2}[(-1)(-2)\ldots(-(n-1))]((x-2)^{-n} - x^{-n}) +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{2}[(-1)(-2)\ldots(-(n-2))]((x-2)^{-(n-1)} - x^{-(n-1)}).$$

4.④ $y'_x = \frac{2}{3}\frac{t+1}{t^2+t+1}$; $y''_{xx} = -\frac{2}{9}\frac{t^2(t+2)}{(t-1)(t^2+t+1)}$; $y''_{xx}|_{t=-1} = \frac{1}{9}$.

5.④ $$y = 3\ln 2 + \left(\ln 2 + \frac{9}{2}\right)(x+1) +$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k-1}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right) + \frac{3}{k}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\right)\right](x+1)^k + o\left((x+1)^n\right).$$

6.⑤ $e^{-7/50}$; Основание степени $= \left(1 - \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{200}x^4 + o(x^5)\right) +$
$$+\left(\frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^5)\right) = 1 - \frac{21}{200}x^4 + o(x^5).$$

7.⑥ $\frac{20}{13}$; Числитель:
$$\left(x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{3}{2}x^3 + o(x^4)\right) = \frac{5}{6}x^3 + o(x^4);$$
Знаменатель:
$$\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{24}x^3 + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{13}{24}x^3 + o(x^3).$$
