1993 г. январь — февраль *т. 48, вып. 1 (289)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРИВИУМ – II

В.И. Арнольд

> Кажется почти чудом, что современные методы обучения еще не совсем удушили святую любознательность.
>
> *А. Эйнштейн*

Призыв сделать экзамены по математике письменными из "Математического тривиума" [1] вызвал многочисленные отклики с критикой и устных, и письменных экзаменов как из России, так и из других стран Европы и Америки. Авторы многих писем из России считают, что в среднем преподаватели умеют решать треть задач тривиума [1]. На этом основании они полагают, что задачи тривиума слишком трудны. Вероятно, это следует сопоставить с тем фактом, что в СССР около 40% заведующих математическими кафедрами не имели математического образования. Вероятно, положение будет ухудшаться и далее.

В нескольких ВУЗах были испробованы письменные экзамены по различным математическим предметам, так что можно подвести некоторые итоги. Большинство участвовавших преподавателей считает, что принимать письменные экзамены легче, чем устные. Как это ни удивительно, списывание менее опасно, чем можно было бы ожидать, так как оно легко обнаруживается (списываются в основном неверные решения). Увеличение числа неудовлетворительных оценок (за счет выявления студентов, которые ничему не научились) вряд ли следует считать недостатком письменного экзамена.

Наиболее частые нарекания вызывает подбор задач экзамена. Здесь иногда случаются странные вещи (выявление которых, впрочем, тоже полезно: личность составителя и местные традиции ярко проявляются в характере и в самих формулировках задач).

Например, в официальном общеамериканском письменном экзамене (название которого состоит из трех букв, которые я забыл) в 1992 г. имелась такая задача-тест:

"Что более всего похоже на соотношение между углом и градусом из нижеперечисленного:

1) время и минута,
2) молоко и кварта,
3) площадь и квадратный дюйм, ... (еще 3 пары)."

"Правильный" ответ – площадь и квадратный дюйм. Мотивировка: градус есть наименьшая единица измерения углов, квадратный дюйм – площадей, а, например, минута делится ещё и на секунды.

Для нас этот ответ, конечно, звучит дико. Но американские учёные, которых я тестировал, почти всегда дают именно этот "правильный" ответ. Я долго не мог понять, в чём тут дело, пока один известный американский физик не объяснил мне свой – правильный – ответ так: "Дело в том, что я правильно представляю себе степень идиотизма составителей этих задач".

Надеюсь, что сегодня такие задачи нашим экзаменуемым ещё не угрожают. Но наблюдающиеся попытки "американизации" обучения (начиная с начальной и средней школы) могут со временем к этому привести. Конечно, я против такой американизации и не призывал к ней в [1].

Европейские традиции математических экзаменов, разные в разных странах, тоже поучительны. В некоторых случаях университетские экзамены вырождаются в изощрённую систему казуистики, подобную применяемой (или применявшейся?) у нас на вступительных экзаменах и зафиксированной в печально известных сборниках задач (начиная с Новосёлова и др.) для поступающих в ВУЗы.

Литлвуд в "Математической смеси" указывает, что до некоторого момента именно таковы были и университетские экзамены в Англии. Мне кажется, некоторые из приведённых ниже образцов европейских экзаменационных задач также способны вызвать сочувствие к несчастным студентам, вынужденным проходить через подобные математические пытки. "Что отличает эти схоластические культуры – это то, что они отводят ум от всего утончённого, окружая почетом лишь те ребяческие ухищрения, на которые потрачена вся жизнь и на которые смотрят как на естественное занятие людей профессионально степенных" (Ренан).

Опасность скатиться к "ребяческим ухищрениям" есть и у нас, и я призываю составителей экзаменационных задач делать их содержательными, лёгкими, красивыми, поучительными и интересными.

Для меня явилось неожиданностью обилие в экзаменационных упражнениях европейских университетов вопросов, ответы на которые можно прямо списать из учебника. Вероятно, они допустимы, когда экзамен проводится под надзором полиции (как во Франции), но не в наших условиях. Интересно также, что в английской системе оценка работы студента не только растёт с улучшением её качества, но и падает с улучшением качества работ его товарищей-соперников. Возможно, этот соревновательный характер экзамена и препятствует списыванию, но видеть его у нас почему-то не хочется.

Письменный экзамен по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений на механико-математическом факультете МГУ впервые проводился весной 1991 г. На приведённые ниже задачи было отведено два часа. Проверка (10–15 работ на преподавателя) заняла час, после чего результаты объявлялись студентам. Ещё час студенты смотрели свои работы и анализировали ошибки (с помощью преподавателей). Эта часть экзамена была добровольной, но почти все студенты захотели обсудить свои работы с преподавателями.

Критерии оценок уточнялись после упорядочения работ, но в общем оказывались примерно такими: удовлетворительно – более одной верно решённой задачи, хорошо – более двух, отлично – более трёх.

Когда через несколько дней такой же экзамен проводился в другой группе, все задачи полностью заменялись. Чтобы была видна степень сходства вариантов одного дня и степень различия заданий последующих дней, ниже приведены варианты всех дней. Они составлены с учётом того, что студенты, экзаменующиеся позже, знали задачи предыдущих дней (что само по себе для студентов неплохо, но но требует дополнительных усилий от составителя). Составлять задачи было бы легче, если бы весь курс (поток) сдавал экзамен одновременно, но это по техническим причинам не удалось организовать.

Экзамен по дифференциальным уравнениям, механико-математический факультет МГУ, 1991 г.

Первый день (один из 6 вариантов).

1. Найти образ вектора $(1,0)$, приложенного в точке $(\pi,0)$, под действием преобразования за время $t=1$ фазового потока системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=\sin x$.

2. В каких координатах разделяются переменные в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + x^3y^3\ ?$$

3. Имеет ли задача Коши

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + (x^3 - x)\frac{\partial u}{\partial y} = y^2, \qquad u(0, y) = 0,$$

решение в окрестности точки $(x_0 = 0, y = y_0)$ и единственно ли оно?

4. Устойчиво ли по Ляпунову решение системы

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = -xz, \quad \dot{z} = 0$$

с начальным условием (x_0, y_0, z_0)?

Второй день. Дана система (6 вариантов):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = y^3, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^4. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = -y^2, \\ \dot{y} = x^2. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = y^4, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = x^2. \end{cases}$$

1) Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

2) Все ли решения системы продолжаются неограниченно?

3) Сколько ненулевых решений, для которых $y(0) = x(1) = 0$, имеет система?

4) Найти производную решения с начальным условием $x(0) = y(0) = a$ по a при $a = 0$.

Третий день. Дана система (6 вариантов):

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y, \\ \dot{y} = -xy^2. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = -x^2y^2, \\ \dot{y} = xy^3. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = -x^2y^3, \\ \dot{y} = xy^4. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = x^2y. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = xy^3, \\ \dot{y} = -x^2y^2. \end{cases} \begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^2y^3. \end{cases}$$

1) и 2) – как в предыдущий день.

3) Найти диффеоморфизм плоскости, выпрямляющий поле направлений фазовых кривых в окрестности точки $(1, 1)$.

4) Найти все непрерывные на всей плоскости первые интегралы, совпадающие с y на оси y.

Четвёртый день. Дана система (6 вариантов):

$$\dot{z} = iz^2. \quad \dot{z} = \bar{z}^2. \quad \dot{z} = iz^2\bar{z}. \quad \dot{z} = z\bar{z}^2. \quad \dot{z} = iz\bar{z}^2. \quad \dot{z} = i\bar{z}^2.$$

1) – как в предыдущие дни.

2) Найти все начальные условия, для которых решения продолжаются неограниченно вперёд.

3) Найти образ вектора $(0, 1)$, приложенного в точке 0, под действием преобразования фазового потока за время 1.

4) Найти все первые интегралы, непрерывные в окрестности точки $z = 1$ и равные 1 на вещественной оси.

Пятый день. Рассматривается задача (один из 6 вариантов):

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - (1 + x^4 + y^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \qquad u(0, y) = 0.$$

1) Имеет ли задача определённое на всей плоскости неограниченное решение?

2) Ограничена ли величина u на характеристиках?

3) Все ли характеристики пересекают поверхность $y = x + u^2$?

4) Имеет ли уравнение характеристик первый интеграл, производная которого по u в начале координат равна 1? Найти производную этой производной по u вдоль характеристического вектора.

Шестой день. Дано уравнение (6 вариантов):

$$\ddot{x} + x = \operatorname{sh}^3 x. \quad \ddot{x} + x = \operatorname{sh}^3 x/2.$$
$$\ddot{x} + \sin x = x^3. \quad \ddot{x} + \sin x = x^3/2.$$
$$\ddot{x} + x = 2x^3. \quad \ddot{x} + x = x^3/2.$$

1) Продолжается ли решение с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ на всю ось t?

2) Ограничена ли третья производная по a при $a = 0$ решения с начальным условием $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$?

3) Вычислить значение этой производной при $t = 2\pi$.

4) Вычислить десятую производную решения с начальным условием $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ по a при $a = 0$.

Седьмой день. Дано уравнение (6 вариантов):

$$\dot{x} = x^2 - \sin^2 t. \quad \dot{x} = x^2 - \cos^2 t.$$
$$\dot{x} = \sin^2 t - x^2. \quad \dot{x} = \cos^2 t - x^2.$$
$$\dot{x} = \operatorname{sh}^2 x - \sin^2 t. \quad \dot{x} = \operatorname{sh}^2 x - \cos^2 t.$$

1) Найти третью производную решения с начальным условием $x(0) = 0$ в нуле.

2) Продолжается ли это уравнение на всю ось t?

3) Имеет ли уравнение неограниченные решения?

4) Найти число асимптотически устойчивых периодических решений уравнения.

Ниже приведены экзаменационные задачи для студентов первого и третьего курсов различных европейских университетов, опубликованные в [2].

Университет Уорика (Англия)

В течение первого года студенты изучают от 10 до 15 предметов ("модулей"), в том числе 8 обязательных. На третьем году обучения число предметов от 8 до 15 (но, начиная со второго года, есть и облегчённые программы с меньшим числом предметов, дающие право на другой диплом). Каждый предмет соответствует 30 лекционным часам, но обучение в основном осуществляется аспирантами-руководителями ("тьюторами"). На первом году один из обязательных предметов – работа с руководителем, на третьем году единственный обязательный предмет специализации "прикладная математика" – курсовая работа, соответствующая двум предметам.

Экзамены короткие (1 ч. 30 мин.–2 часа) и состоят из 3–5 независимых упражнений. Почти все упражнения содержат вопросы из курса. Если дано n упражнений, то оценка выводиться на основании $n-1$ лучшего из предложенных решений. Для иллюстрации разнообразия предметов, ниже выбраны

– для первокурсников: четыре упражнения по предметам "анализ II" (обязательный), "линейная алгебра" (обязательный), "теория групп B" (обязательный для специализирующихся по чистой математике), "жизнь в трёх измерениях" (обязательный для специализирующихся в прикладной математике)

- для третьекурсников: три упражнения по предметам "комплексный анализ" (единственный обязательный предмет для специализирующихся по чистой математике), "алгебраическая топология" и "теория катастроф".

Анализ II.

Определите аккуратно, что означает равномерная непрерывность функции $f : I \to \mathbb{R}$, сформулируйте отрицание этого определения, т. е. что означает отсутствие равномерной непрерывности функции.

Докажите подробно, проверив, что Ваше определение выполнено, что $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, но $g(x) = x^2$ – нет. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема на $[a, b]$, определим $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ соотношением $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$..

Предполагая известными все нужные Вам свойства интеграла (сформулируйте их), докажите, что F равномерно непрерывна на $[a, b]$; если же f еще и непрерывна, то докажите, что F дифференцируема и что $F' = f$.

Линейная алгебра.

1. $T : V \to V$ – линейное преобразование из векторного пространства V в себя. Определите линейные преобразования $T^2 : V \to V$ и $T^3 : V \to V$.

2. V – трёхмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $T : V \to V$ – такое линейное преобразование, что $T^2 \neq 0$, но $T^3 = 0$. Пусть e_1 – вектор в V такой, что $T^2 e_1 \neq 0$. Пусть $e_2 = Te_1$ и $e_3 = T^2 e_1$. Покажите, что e_1, e_2, e_3 образуют базис в V.

3. Найдите матрицу преобразования $T : V \to V$ в базисе e_1, e_2, e_3.

4. Докажите, что каждая 3×3 матрица A над $\mathbb{R}$, для которой $A^2 \neq 0$, но $A^3 = 0$, подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Теория групп.

Определите гомоморфизм и ядро. Докажите, что ядро гомоморфизма – нормальная подгруппа.

Сформулируйте первую теорему о гомоморфизмах.

Докажите, что диедральная группа D_{2n} не имеет сюрьективных гомоморфизмов на циклическую группу C_n порядка n, если $n > 2$.

Предъявите инъективный гомоморфизм C_n в D_n.

Жизнь в трёх измерениях.

1. Пусть $S = \{((2 + \cos x)\cos y, (2 + \cos x)\sin y, \sin x)) \mid 0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\}$. Найти площадь S.

2. a) Для функции $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и векторного поля $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ докажите, что $\operatorname{div}(gv) = \nabla g \cdot v + g \cdot \operatorname{div} v$. Выведите отсюда, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_\Omega g \cdot \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} gv \cdot n\, dA - \int_\Omega \nabla g \cdot v,$$

где n – внешняя нормаль $\partial\Omega$ и dA – инфинитезимальный элемент площади на $\partial\Omega$.

b) Предполагая дополнительно, что $v = \nabla g$, $\operatorname{div}(\nabla g) = \operatorname{div} v = 0$, и что $g\big|_{\partial\Omega} = 0$, покажите, что g (а значит, и v) – тождественный нуль в Ω.

3. Для $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ как $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

a) Вычислить ∇u в терминах x, y, z и f'.

b) Пусть $v(x, y, z) = \nabla u(x, y, z)$ и $\operatorname{div} v = 0$. Для $R > 1$ пусть $\Omega_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Применив теорему о дивергенции к v в Ω_R, покажите, что $R^3 f'(R^2) = f'(1)$. Пусть $t = R^2$, покажите, что $f(t) = f(1) + 2f'(1)(1 - t^{-1/2})$.

Комплексный анализ.

1. Определите вычет $\operatorname{res}(f, z_0)$ функции f в изолированной особой точке z_0. Если z_0 – простой полюс f, докажите, что $\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

2. Сформулируйте теорему Коши о вычетах.

3. Докажите, что

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1 + b\cos^2 t} = \frac{2}{ib} \int_C \frac{z\,dz}{z^4 + 2(1 + 2/b)z^2 + 1},$$

где b вещественно положительно и $C(t) = e^{it}$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$.

Выведите из 1. и 2., что этот интеграл равен $\pi/\sqrt{1 + b}$.

Алгебраическая топология.

1. Определите клеточные гомологии $H_n^c(K)$ клеточного комплекса K. Определите изоморфизм $\varphi : H_n(K) \to H_n^c(K)$ (доказывать, что φ корректно определено, не обязательно).

2. Вычислите гомологии клеточного комплекса $K = e_0^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup_f e^2$, где f соответствует слову $a_1 a_2 a_3 a_2^{-1} a_3^{-1} a_1$.

Опишите элемент порядка 2 в $H_1(K)$.

Теория катастроф.

1. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ – плоская кривая, пробегаемая со скоростью единица, $k(t)$ – её кривизна в $\gamma(t)$ и $n(t)$– нормальный орт в $\gamma(t)$. *Каустикой кривой* γ называется бифуркационное множество функций "квадрат расстояния" $f_a(t) = \|\gamma(t) - a\|^2$. Докажите, что каустика параметризуется соотношением $a = \gamma(t) + n(t)/k(t)$, если кривизна не обращается в нуль. Что случиться в точке, где кривизна обращается в нуль?

Нарисуйте кривую $y^2 = x^2(1 - x^2)$ и (без вычислений) попытайтесь понять, как выглядит её каустика. (Формулами Серре–Френе можно пользоваться, не доказывая их.)

2. Определите кривую центров масс вытесненной воды и математическую кривую (двумерного) судна. Покажите, что кривая центров масс вытесненной воды эллиптического судна – также эллипс, и опишите его метацентрическую кривую. Опишите коротко, как меняется равновесие корабля, когда его центр тяжести движется по оси эллипса (различая большую и малую оси).

(Можете не доказывать, что линейные преобразования переводят центр тяжести плоской области в центр тяжести её образа.)

Университет Копенгагена

Число предметов здесь меньше (4 для первокурсников специальностей математика и физика). Каждой специализации соответствует определённый набор курсов. Каждый предмет изучается на лекциях, сопровождающихся упражнениями. Экзамены, как правило, письменные, состоят из 3 или 4 независимых упражнений, которые могут включать вопросы курса. Но это не всегда экзамены в классическом смысле слова: два из трёх экзаменов для третьекурсников, приведённых ниже, состоят из упражнений, на которые студентам даётся два с половиной дня, под честное слово, что каждый работает самостоятельно.

Ниже приведены:

для первокурсников – одно упражнение по анализу и одно по линейной алгебре;

для третьекурсников – одно упражнение по теории групп, одно по дифференциальной геометрии и два по системам дифференциальных уравнений.

Упражнение 1. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ и $\overline{f}(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x}$ при $(x, y) \in \Omega$.

a) Вычислить $\partial\overline{f}/\partial x = D_1\overline{f}(x, y)$ и $\partial\overline{f}/\partial y = D_2\overline{f}(x, y)$ для всех $(x, y) \in \Omega$.

b) Найти степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ такой, что

$$\overline{g}(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

и вывести отсюда, что $\overline{g} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ продолжается до функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ класса C^∞. Найдите $g(0)$ и $g'(0)$.

c) Докажите, что $\overline{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ продолжается до функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ класса C^∞. Найдите $f(0, y)$, $D_1 f(0, y)$ и $D_2 f(0, y)$ для всех $y \in \mathbb{R}$.

Указание. $\overline{f}(x, y) = y\,\dfrac{\sin xy}{xy} = yg(xy)$ при $x \neq 0, y \neq 0$.

Упражнение 2. Рассмотрим матрицу $B(c)$, $c \in \mathbb{R}$,

$$B(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 2 & c+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Определить для каждого $c \in \mathbb{R}$ полином q степени 2 такой, что для характеристического полинома $p_{B(c)}$ матрицы $B(c)$, $p_{B(c)}(t) = (c-t)q_c(t)$ для всех c и $t \in \mathbb{R}$.

b) Докажите, что $q_c(c) = 0$ при $c = -1$. Покажите, что при $c \neq -1$ матрица $B(c)$ имеет 3 собственных числа.

c) Найдите множество $D = \{c \in \mathbb{R} \mid B(c)\ \mathbb{R}\text{-диагонализируема}\}$. Докажите, что множество $O = \{c \in \mathbb{R} \mid B(c)$ диагонализируема в ортогональном базисе$\}$ пусто.

Упражнение 3. Пусть S – регулярная поверхность, U – открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$, и пусть $(u,v) \to X(u,v)$ – параметризация S, определённая в U. Во всей задаче предполагается, что коэффициенты E, F, G первой фундаментальной формы S, вычисленные при помощи параметризации (X, U), обладают следующими свойствами: E зависит только от u, G только от v, F тождественно равно нулю.

a) Пусть $w(t)$ – векторное поле вдоль параметризованной кривой $X\big(u(t), v(t)\big)$. Докажите, что угол между $X_u\big(u(t), v(t)\big)$ и $w(t)$ не зависит от t.

b) Покажите с помощью a) (или независимо), что гауссова кривизна K – тождественный нуль.

c) Докажите, что $X(u)$ локально изометрично $\mathbb{R}^2$, используя, если угодно, параметризацию $\mathbb{R}^2$ вида $(u,v) \to \big(\varphi(u), \psi(v)\big)$.

Упражнение 4. Группа порядка 12 имеет 6 классов сопряжённых элементов. Укажите число классов неприводимых представлений и размерности этих представлений. Зная, что порядки классов $K_1, \dots, K_6$ равны 1, 1, 2, 2, 3, 3 и что заданные ниже функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ являются характерами, определить, какие из них неприводимы, и составить таблицу характеров группы

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
φ_1	1	1	1	1	−1	−1
φ_2	1	−1	−1	1	−1	1
φ_3	3	1	−2	0	1	−1

Упражнение 5.
Дана краевая задача

$$\varepsilon y'' + (x^2 - 7x + 12)y' + (x_5)y = 0,$$
$$y(0) = \frac{91}{144}, \quad y(1) = \frac{3}{4}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $y(x,\varepsilon)$ точное решение этой задачи. Определить для всякого ε приближённое решение $y^u(x,\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{0 \le x \le 1} |y(x,\varepsilon) - y^u(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Упражнение 6.
Дана автономная система в плоской области

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2xy - 5x + 5y + 4, \\ y' = xy - 4y, \end{cases} \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0\}.$$

a) Найти положения равновесия и типы невырожденных положений равновесия.

b) Показать, что орбита $\big(x(t), y(t)\big)$, $t \in I$, находящаяся при $t_0 \in I$ в первом квадранте, останется в замкнутом первом квадранте при всех $t \ge t_0$, $t \in I$.

c) Найти замкнутую ограниченную область, обладающую следующим свойством: каждая орбита, вошедшая в область, остаётся там в дальнейшем.

Франция

Для первокурсников: части I и II июньского экзамена 1991 г. в Университете Париж-6 (третья часть представляла собой вопросник типа да/нет по всему пройденному материалу).

Для третьекурсников: экзамен по интегрированию в Университете Париж-7 в 1990 г.

Экзамен в Университете Париж-6 (первокурсники).

I

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Цель упражнения – найти комплексные матрицы B такие, что $B^3 = A$.

1) Найдите собственные числа и пространства для A. Найдите матрицу P такую, что $D = P^{-1}AP$ имеет диагональный вид с $a < b < c$ на диагонали, причём первая строка P состоит из единиц.

2) Пусть E – комплексное n-мерное векторное пространство и f – эндоморфизм E с n различными собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Обозначим через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ ненулевые собственные векторы, соответствующие числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (в указанном порядке).

Пусть g – эндоморфизм E, такой что $f \circ g = g \circ f$. Покажите, что векторы $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ собственные для g, и выведите отсюда, что g диагонализируется в том же базисе, что и f.

3) Покажите, что если $B^3 = A$, то $AB = BA$, и выведите отсюда, что $\Delta = P^{-1}BP$ диагональна.

4) Найдите все диагональные матрицы Δ с комплексными элементами, для которых $\Delta^3 = d$.

5) Найдите отсюда число матриц B с комплексными элементами, для которых $B^3 = A$, и вычислите явно ту из них, которая имеет только вещественные элементы.

II

1) Плоскость отнесена к ортонормированному реперу (O_x, O_y). Дана функция φ класса C^1 на интервале I оси $\mathbb{R}$. Для всякого t из I через M_t обозначается точка с координатами $(\varphi(t), t^2+t)$, через P_t – точка с координатами $(t^2, 0)$ и через Γ_φ – кривая, описываемая точкой M_t, когда t меняется на I.

Покажите, что для того, чтобы касательная к кривой Γ_φ в точке M_t проходила через точку P_t для всякого t, кроме -1/2, необходимо и достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла некоторому дифференциальному уравнению, и найдите это уравнение.

2) Пусть (E) – дифференциальное уравнение

$$x(x+1)y' - (2x+1)y + x^2(2x+1) = 0$$

a) Для каких точек плоскости можно априори утверждать, что через них проходит локально одна и только одна интегральная кривая? Для каких точек плоскости можно априори утверждать, что через них не проходит ни одной интегральной кривой?

b) Определите множество точек, где касательные всех интегральных кривых уравнения E горизонтальны.

c) Найдите решения дифференциального уравнения E на интервалах

$$]-\infty, -1[, \quad]-1, 0[\quad \text{и} \quad]0, +\infty[.$$

d) Можно ли продолжить эти решения в -1? в 0? Есть ли решения на $\mathbb{R}$?

3) Рассмотрим кривые Γ_φ, определённые в 1), для функций φ, удовлетворяющих уравнению (E) на $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, продолженных по непрерывности в -1. Рисунок кривых прилагается.

a) Рисунок подсказывает, что кривые Γ_φ имеют две общих точки. Докажите это и определите касательные кривых Γ_φ в этих точках.

b) Рисунок подсказывает, что каждая кривая Γ_φ имеют точку возврата R_φ и что точки R_φ лежат на прямой. Докажите это и найдите уравнение этой прямой.

Экзамен в Университете Париж-7 (третий курс).
Части I, II и III довольно независимы.

I

Пусть g – ограниченная борелевская функция на интервале $[0,1]$.

1) Покажите, что для любого $t \in [0,T]$ и фиксированного n

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k-1}/k!\right)\int_0^T e^{kn(t-T+s)}g(s)\,ds = \int_0^T\left(1-\exp(-e^{n(t-T+s)})\right)g(s)\,ds.$$

2) Предположим отныне, что существует константа M такая, что

$$\left|\int_0^T g(s)e^{ns}\,ds\right| \le M$$

для всякого целого n. Покажите, что для всякого $t \in [0,T]$ левая часть равенства 1) стремится к 0, когда n стремится к бесконечности. Выведите из этого, что при всех $t \le T$

$$\int_{T-t}^{T} g(s)\,ds = 0.$$

3) Покажите, что g равна нулю почти всюду. Если g непрерывная, то она тождественно равна нулю.

4) Выведите из предыдущего, что если f – непрерывная функция на $[1,v]$ такая, что

$$\left|\int_1^v x^n f(x)\,dx\right| \le N < \infty$$

для всех целых n, то f тождественно равна нулю.

5) Если f – непрерывная на $[0,T]$ функция такая, что $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ при всех n, то f тождественно равна нулю. (Это можно вывести из 4), но можно доказать и прямо при помощи теоремы Стоуна – Вейерштрасса и результатов настоящего курса.)

II

Пусть f – борелевская локально ограниченная функция, равная нулю на $]-\infty,0]$. Для фиксированного $T>0$ положим

$$I_n = \int_0^T e^{ns}(f*f)(s)\,ds.$$

1) Сделав замену переменной $u = T-v$, $s = 2T-v-w$, покажите, что

$$I_n = \int_0^T dv\int_{T-v}^{T} e^{n(2T-v-w)}f(T-v)f(T-w)\,dw.$$

2) Начиная отсюда, предположим, что $f*f$ – тождественный нуль. Покажите, что

$$\left(\int_0^T e^{-nv}f(T-v)\,dv\right)^2 = \iint_\Delta e^{-n(v+w)}f(T-v)f(T-w)\,dv\,dw,$$

где Δ – область $\{(v,w)\mid 0\le v,w\le T,\ v+w\le T\}$.

3) Покажите, пользуясь I, что если f непрерывна на $[0, 1]$, то f – тождественный нуль.

III

Пусть f и g – две непрерывные функции, равные 0 на $]-\infty, 0]$ и такие, что $f * g = 0$.

1) Положим $f_1(t) = tf(t)$, $g_1(t) = tg(t)$. Покажите, что

$$(f_1 * g) + (f * g_1) = 0,$$

и выведите отсюда, что

$$(f * g) * (f_1 * g_1) + (f * g_1) * (f * g_1) = 0.$$

2) Выведите отсюда, что при любых n и t

$$\int_0^t f(t-u)u^n g(u)\,du = 0.$$

3) Покажите, наконец, что f и g тождественно равны нулю.

Ниже приведены задачи экзаменов 1992 г. по дифференциальным уравнениям на механико-математическом факультете МГУ.

Экзамен по линейной теории (Н.Х.Розов, январь 1992; 3 часа).

1. Рассмотрим линейное уравнение

$$(1) \qquad (\alpha t + \alpha)\frac{d^3y}{dt^3} + \pi\alpha\frac{d^2y}{dt^2} - (\alpha - 1)t^2 \cdot \operatorname{tg} t \cdot y = \ln\frac{e+t}{e-t}$$

с дополнительными условиями:

$$(2) \qquad y(a) = 1, \quad y'(a) = A, \quad y''(a) = \alpha;$$

здесь α, a, A – действительные параметры.

a) (2 балла) Укажите все значения параметров α, a, A, при которых теорема существования и единственности гарантирует однозначную разрешимость задачи Коши для дифференциального уравнения 3-го порядка (1) с начальными условиями (2).

b) (1 балл) Какова область определения непродолжаемого решения начальной задачи (1)–(2) в случае $\alpha = -1$, $a = -2$, $A = -3$?

c) (1 балл) Представьте начальную задачу (1)–(2) в форме задачи Коши для нормальной линейной системы дифференциальных уравнений.

2. Обозначим через (3) линейное однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (1) при значении $\alpha = -1$. Рассмотрим для этого уравнения (3) три задачи Коши соответственно с начальными условиями:

$$(4) \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0;$$

$$(5) \qquad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1 \quad y''(1) = -1;$$

$$(6) \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = -2;$$

пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$, $t \in I$ – непродолжаемые решения этих задач.

a) (1 балл) Укажите явно интервал I и докажите, что $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ – фундаментальная система решений уравнения (3) на I.

b) (1 балл) Получите выражение для определителя Вронского решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, справедливое на интервале I.

c) (2 балла) Запишите решение задачи Коши для уравнения (3) с начальными условиями

$$y(1) = y_0, \quad y'(1) = y_1, \quad y''(1) = y_2$$

через функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$.

3. (3 балла) Имеется ли во множестве всех действительных решений уравнения

$$y''' + y = a\cos t, \qquad a = \text{const} > 0,$$

периодическая функция?

4. (5 баллов) Вычислите основную матрицу e^{tA} для линейной однородной системы

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

с постоянной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. (4 балла) Пусть $K(t,\tau)$ – матрица Коши (фундаментальная матрица, нормированная в точке τ) для линейной однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

где матрица $A(t)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Выразите производную $\dfrac{\partial K(t,\tau)}{\partial \tau}$ через матрицы A и K.

Экзамен по нелинейным дифференциальным уравнениям (Н.Х.Розов, июнь 1992г.).

1. (3 балла) Известно, что функция $u(t) \in C([0,\infty])$ удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le u(t) \le \frac{1}{\pi} + \int_0^t e^{-\pi\tau}[u(\tau)]^2\,d\tau \qquad \text{при всех } t \in [0,\infty).$$

Укажите оценку сверху для величины $\sup_{[0,\infty)} u(t)$.

2. (4 балла) Может ли уравнение 3-го порядка

$$\dddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью $f(t,x,u,v)$ иметь обе функции

$$x_1 = 3 + \sin t - 2\cos t, \qquad t \in \mathbb{R},$$
$$x_2 = \frac{1}{1-t}, \qquad -1 < t < \frac{1}{2},$$

среди своих решений? Ответ обоснуйте.

3. При каких (действительных) значениях параметра a тривиальное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + (a+1)x^2, \\ \dot{y} = x + ay \end{cases}$$

является:

a) (1 балл) Асимптотически устойчивым?

b) (2 балла) Устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически устойчивым?

c) (1 балл) Неустойчивым?

4. Рассматривается фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} - x = 0$$

на фазовой плоскости $(x, y = \dot{x})$.

a) (1 балл) Определите тип фазового портрета этого уравнения при каждом (действительном) значении параметра δ.

b) (2 балла) Нарисуйте фазовые портреты указанного уравнения при $\delta = -1$ и при $\delta = 1$.

c) (1 балл) Для исследуемого уравнения при $\delta = 0$ найдите положение равновесия на фазовой плоскости и выясните, будет ли оно асимптотически устойчивым, устойчивым по Ляпунову или неустойчивым (ответ обоснуйте). Сколько прямолинейных траекторий имеется в этом случае у фазового портрета?

5. a) (1 балл) Сформулируйте теорему о дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по параметру.

b) (4 балла) Вычислите производную от решения $x = \varphi(t, \lambda)$ задачи Коши

$$\ddot{x} + x = \lambda \sin t + \lambda x^2,$$
$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

по параметру λ при значении $\lambda = 0$.

Экзамен по дифференциальным уравнениям (А.Ф.Филиппов, июнь 1992).

1. При каких постоянных a и b все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 4x + a, \\ \dot{y} = 2x - y + b \end{cases}$$

ограничены при $t > 0$?

2. a) Дать определение устойчивости по Ляпунову.

b) Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2 t \end{cases}$$

найти решение с периодом π.

c) Устойчиво ли это решение?

3. Для уравнения

$$\ddot{x} + 4x - 6x^2 = 0$$

a) Найти траекторию на фазовой плоскости, проходящую через точку $(1, 0)$;

b) Найти решение уравнения с начальными условиями

$$x(0) = 1, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

4. Найти производную по параметру μ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$y' = \mu x + \frac{1}{2y}, \qquad y(1) = 1 - 2\mu, \qquad x > 0.$$

5. a) Сформулировать теорему о существовании решения задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными.

b) Решить задачу Коши

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz, \qquad \text{линия } L : x = 1, z = 1 + y^2.$$

Список литературы

1. Арнольд В.И. Математический тривиум // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 225–232.
2. Artigue M. Sujets d'examens d'ici et d'ailleurs // Gazette des Mathematiciens. 1992. №53. P. 77–83.