ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Курс 3 Семестр 6 2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1. ⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:

$$9u_{tt} = u_{xx} + t\sin\frac{x}{3} + x\sin\frac{t}{3}, \ (t > 0,\ x > 0); \quad u|_{t=0} = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \sin 2x, \ (x \geqslant 0);$$
$$u_t|_{t=0} = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x + 9\sin\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\cos 2x, \ (x \geqslant 0); \quad (u - u_x)|_{x=0} = -2 - 3t + \sin\frac{t}{3}, \ (t \geqslant 0).$$

2. ⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{t}{2} - 2\sin t\sin 2x, \quad (t > 0,\quad 0 < x < \pi); \quad u|_{t=0} = 1, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi);$$
$$u_t|_{t=0} = 7 + x^2, \ (0 \leqslant x \leqslant \pi); \quad u_x|_{x=0} = 0, \ (t \geqslant 0); \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, \ (t \geqslant 0).$$

3. ⑥ Решить классическую задачу Коши: $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x + 2y)$, $(t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$;

$$u|_{t=0} = yz^3, \ ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3); \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1 + (x - 2z)^2}, \ ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

4. ③ Решить задачу Неймана:

$$\Delta u = 24(x^2 - y^2), \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1); \quad u_r|_{r=1} = 4\cos 2\varphi + 4\cos 4\varphi, \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

5. ⑤ Решить интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(5x^2y^3 + 7x^3y^2)u(y)\,dy + 5x + 7x^4, \quad u(x) \in C[-1,1],$$

где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6. ⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:

$$u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi, \quad (t > 0, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = f(r)\cos\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \quad u|_{r=2} = 0, \quad (t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$

где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $f(r) \in C^1[0,2]$, $f(2) = 0$, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(\xi)$.

7. ③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 4f' + 4f = 3\delta + \delta'$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8. ④ Найти

$$\inf_{u\in H}\int_{|x|<1}\left(|\nabla u|^2 + 20\frac{x_1x_2}{|x|}u\right)dx,$$

где $H = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1),\ u|_{|x|=1} = 2x_1x_2\}$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 61

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов			**Оценка**	
Фамилия проверяющего			**Фамилия экзаменатора**	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$4u_{tt} = u_{xx} + 20tx^3 + 20xt^3$, $(t > 0,\ x > 0)$; $u|_{t=0} = -1 + 3x^2 + \cos 2x$, $(x \geqslant 0)$;
$u_t|_{t=0} = -x - x^5 + \sin 2x$, $(x \geqslant 0)$; $u_x|_{x=0} = t + \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{t+2} + e^{-t/2}$, $(t \geqslant 0)$.

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$u_{tt} = 3u_{xx} + 3u - 3tx - 6t + 9\pi \sin t \sin\frac{x}{2}$, $(t > 0,\quad 0 < x < \pi)$; $u|_{t=0} = 0$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$;
$u_t|_{t=0} = 2 + x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$; $u|_{x=0} = 2t$, $(t \geqslant 0)$; $u|_{x=\pi} = 2t + \pi t$, $(t \geqslant 0)$.

3.⑥ Решить классическую задачу Коши:
$u_t = 2\Delta u + xe^{8t-2z}$, $(t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$; $u|_{t=0} = (x+z)^4 \cos y$, $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

4.③ Решить краевую задачу:
$$\Delta u = -\frac{\cos\varphi}{r^2}, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} > 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$(u - u_r)|_{r=1} = 3\sin 2\varphi + 2\cos\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ — ограниченная функция при $r > 1$.

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y - \cos^2 y) u(y)\, dy + 3\sin x + \cos x, \quad u(x) \in C[-\pi,\pi],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 4\Delta u - u + e^{-t} f(r) \sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad (t > 0, \quad r < 5, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$u|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{5} r\right) \sin 3\varphi$, $(r \leqslant 5, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $u|_{r=5} = 0$, $(t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$;
где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $f(r) \in C^1[0,5]$, $f(5) = 0$, $\mu_2^{(3)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_3(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 9f = 3\delta + 2\delta'$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u \in H} \int_{1<|x|<2} \left(|\nabla u|^2 + 8u\right) dx,$$
где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2),\ u|_{|x|=1} = 1,\ u|_{|x|=2} = 4 + \ln 2\}$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$u_{tt} = 9u_{xx} + 9t\cos 3x - 9x\cos 3t\,,\ (\,t>0\,,\ x>0\,);$
$u|_{t=0} = 3 + 5x + 4x^2 + \sin 2x + \cos 2x\,,\ (\,x \geqslant 0\,);$
$u_t|_{t=0} = -6 - 24x + 6\sin 2x - 6\cos 2x + \dfrac{1}{9}\cos 3x\,,\ (\,x \geqslant 0\,);$
$(u - u_x)|_{x=0} = -2 + \dfrac{1}{9}t - \cos 3t\,,\ (\,t \geqslant 0\,).$

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$u_{tt} = u_{xx} + 5u - 5tx - 5t + 9\pi e^{-t}\sin 2x,\quad \left(t>0,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right);\quad u|_{t=0}=0,\quad \left(0\leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right);$
$u_t|_{t=0} = 1 + x\,,\ \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right);\quad u|_{x=0} = t\,,\ (\,t\geqslant 0\,);\quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t\,,\ (\,t \geqslant 0\,).$

3.⑥ Решить классическую задачу Коши: $u_{tt} = 4\Delta u\,,\ (\,t>0\,,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,);$
$u|_{t=0} = e^x yz\,,\ (\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,);\qquad u_t|_{t=0} = xy^3 + \operatorname{sh}(x^2+y^2+z^2)\,,\ (\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,).$

4.③ Решить краевую задачу: $\Delta u = 24xy\,,\ (\,r=\sqrt{x^2+y^2}<1\,);$
$(u+u_r)|_{r=1} = 2\sin\varphi - 3\sin 2\varphi\,,\ (\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,).$

5.⑤ Решить интегральное уравнение:

$$u(x) = \lambda\int_{-1}^{1}(3xy^2 + 5x^2y)u(y)\,dy + 5x^3 - 7x^4,\quad u(x)\in C[-1,1],$$

где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:

$$u_t = 9\Delta u - 2u + e^{-2t}J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),\quad (t>0,\quad r<2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);$$

$$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi,\quad (r\leqslant 2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);\quad u|_{r=2}=0,\quad (t\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);$$

где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r=0$, $(\,t\geqslant 0\,,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,)$; $f(r)\in C^1[0,2]$, $f(2)=0$, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_1(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 5f' + 4f = 2\delta' - \delta$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти

$$\inf_{u\in H}\int_{|x|<1}\left(|\nabla u|^2 + 16x_1 u\right)\,dx,$$

где $H = \{u(x)\in C^1(|x|\leqslant 1)\,,\ u|_{|x|=1} = x_1\}\,,\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,.$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 63

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2005/2006 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Найти классическое решение смешанной задачи:
$u_{tt} = 4u_{xx} - 12tx^2 + 12xt^2$, $(t > 0,\ x > 0)$; $u|_{t=0} = -1 + x^2 + \ln(1+x) + e^{-x}$, $(x \geqslant 0)$;
$u_t|_{t=0} = 4x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{1+x} + 2e^{-x}$, $(x \geqslant 0)$; $u_x|_{x=0} = -4t + t^4 + 2\sin 4t$, $(t \geqslant 0)$.

2.⑦ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_{tt} = u_{xx} + 39\pi e^{-t}\sin x, \quad \left(t > 0,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\right); \quad u|_{t=0} = 2x, \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right);$$
$$u_t|_{t=0} = 1 - \cos 5x, \ \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right); \quad u_x|_{x=0} = 2, \ (t \geqslant 0); \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi + t, \ (t \geqslant 0).$$

3.⑥ Решить классическую задачу Коши:
$5u_t = \Delta u$, $(t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$; $u|_{t=0} = (20x + z^5)e^{x-3y}$, $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

4.③ Решить краевую задачу:
$$\Delta u = -2\frac{\sin\varphi}{r^2}, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2} > 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$(u - u_r)|_{r=1} = 16\sin^3\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $u(r,\varphi)$ — ограниченная функция при $r > 1$.

5.⑤ Решить интегральное уравнение:
$$u(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{3}{2}x\cos y + y\cos x\right) u(y)\,dy + x^2 + 2\pi\sin x, \quad u(x) \in C[-\pi,\pi],$$
где λ — вещественный параметр. Найти характеристические числа и собственные функции соответствующего интегрального оператора.

6.⑤ Методом разделения переменных решить смешанную задачу:
$$u_t = 4\Delta u - 2u + f(r)\sin 5\varphi, \quad (t > 0, \quad r < 3, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
$$u|_{t=0} = J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right)\sin\left(5\varphi - \frac{\pi}{3}\right), \quad (r \leqslant 3, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi); \quad u|_{r=3} = 0, \quad (t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi);$$
где $u(t,r,\varphi)$ ограничена в окрестности $r = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; $f(r) \in C^1[0,3]$, $f(3) = 0$, $\mu_1^{(5)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_5(\xi)$.

7.③ Найти в $D'(\mathbb{R}^1)$ частное решение уравнения $f'' + 2f' + 5f = 3\delta' - \delta$ вида $f = Z(x)\theta(x)$, где $Z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

8.④ Найти
$$\inf_{u \in H} \int_{1<|x|<2} \left(|\nabla u|^2 + 6\frac{x_2}{|x|}u\right) dx,$$
где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2),\ u|_{|x|=1} = x_2,\ u|_{|x|=2} = 2x_2\}$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 64

Урматфиз 2005/2006. Ответы. Вариант 61.

1. $u(t,x)=9t\sin\frac{x}{3}-x\sin\frac{t}{3}+x+\frac{t}{3}+\begin{cases}3+2(x-\frac{t}{3})+\frac{3}{2}(x-\frac{t}{3})^2+\sin 2(x-\frac{t}{3}), & (t\le 3x);\\ x-\frac{t}{3}+3\cdot e^{x-\frac{t}{3}}, & (t\ge 3x).\end{cases}$

2. $u(t,x)=tx^2+1+7t+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{8a_{2n+1}}{(2n+1)^2-4}\left(\frac{2}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2}t-\sin t\right)\cos(2n+1)x;$
$\sin 2x=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\cdot\cos kx$, где $a_k=0$ при $k=2n$ $(k=0,1,\dots)$, $a_{2n+1}=-\frac{8}{\pi((2n+1)^2-4)}$.

3. $u(t,x,y,z)=(4\cos t+2t^2-4)\cos(x+2y)+yz^3+0{,}6\cdot t^2yz+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(t+$
$+x-2z)+\operatorname{arctg}(t-x+2z))$.

4. $u=2r^4\cos 2\varphi-2r^2\cos 2\varphi+r^4\cos 4\varphi+c$, $(\forall c\in\mathbb{R}^1)$.

5. $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $u_1(x)=(5x^2-7x^3)\cdot C$, $(\forall C\neq 0)$; $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $u_2(x)=(5x^2+$
$+7x^3)\cdot C$, $(\forall C\neq 0)$; $u(x;\lambda_1)=(5x^2-7x^3)\cdot C-7x^3+5x+7x^4$ $(\forall C\in\mathbb{R}^1)$;
при $\lambda=\lambda_2$ решение не существует; $u(x;\lambda)=5\lambda\cdot C_1\cdot x^2+7\lambda\cdot C_2\cdot x^3+$
$+5x+7x^4=\frac{2\lambda}{1-2\lambda}(5x^2+7x^3)+5x+7x^4$, $(\forall\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2)$, где
$C_1=C_2=\frac{2}{1-2\lambda}$.

6. $u(t,r,\varphi)=T(t)\,J_2\!\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cdot\cos 2\varphi+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}T_k(t)\cdot J_2\!\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2}r\right)\cdot\cos(2\varphi+$
$+\frac{\pi}{4})$, где $T(t)=\frac{1}{b_3}(1-e^{-b_3t})$, $T_k(t)=a_k\,e^{-b_k\cdot t}$, $b_k=2+$
$+\left(\frac{3\cdot\mu_k^{(2)}}{2}\right)^2$; $f(r)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k\,J_2\!\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2}r\right)$, $a_k=\frac{\int_0^2 f(r)\cdot J_2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2}r\right)\cdot r\cdot dr}{\int_0^2 J_2^2\left(\frac{\mu_k^{(2)}}{2}r\right)\cdot r\cdot dr}$.

7. $(1+x)\cdot e^{-2x}\,\theta(x)$

8. $\min=\frac{23\pi}{6}$; $u_0(r,\varphi)=r^3\sin 2\varphi$.

Урматфиз 2005/2006. Ответы. Вариант 62.

1. $u(t,x)=\frac{1}{4}xt^5-x^5t+\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+\begin{cases}-1+2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\cos(2x-t), & (t\le 2x);\\ -1+\ln\left(1-x+\frac{t}{2}\right)+e^{x-\frac{t}{2}}, & (t\geq 2x).\end{cases}$

2. $u(t,x)=t(x+2)+24(t-\sin t)\sin x+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{9\pi\cdot a_n}{\gamma_n^2-1}\left(\sin t-\frac{1}{\gamma_n}\sin\gamma_n t\right)\cdot$
$\cdot\sin nx$; $\sin\frac{x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot\sin nx$, где $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{8n}{(4n^2-1)\cdot\pi}$; $\gamma_n^2=3(n^2-1)$.

3. $u(t,x,y,z)=t\cdot x\cdot e^{8t-2z}+\left((x+z)^4+48t\cdot(x+z)^2+192\,t^2\right)e^{-2t}\cdot\cos y$.

4. $u=\cos\varphi+\frac{\cos\varphi}{2r}+\frac{\sin 2\varphi}{r^2}$.

5. $\lambda_1=-\frac{1}{\pi}$, $u_1(x)=C$, $(\forall C\neq 0)$; $\lambda_2=\frac{1}{2\pi}$, $u_2(x)=C\cdot x$, $(\forall C\neq 0)$;
$u(x;\lambda_1)=-x+3\sin x+\cos x+C$, $(\forall C\in\mathbb{R}^1)$; при $\lambda=\lambda_2$ решение не существует; $u(x;\lambda)=\lambda\cdot c_1\cdot x-\lambda\cdot c_2+3\sin x+\cos x=\frac{3\pi\lambda}{1-2\pi\lambda}x+$
$+3\sin x+\cos x$, $(\forall\lambda\neq\lambda_1;\lambda_2)$, где $c_1=\frac{3\pi}{1-2\pi\lambda}$, $c_2=0$.

6. $u(t,r,\varphi)=T(t)\cdot J_3\left(\frac{\mu_2^{(3)}}{5}r\right)\cdot\sin 3\varphi+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\,J_3\left(\frac{\mu_n^{(3)}}{5}r\right)\cdot\sin\left(3\varphi+\right.$
$\left.+\frac{\pi}{6}\right)$, где $T(t)=e^{-b_2 t}$, $T_n(t)=\frac{a_n}{b_n-1}\left(e^{-t}-e^{-b_n\cdot t}\right)$, $b_n=$
$=1+\left(\frac{2\mu_n^{(3)}}{5}\right)^2$; $f(r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n J_3\left(\frac{\mu_n^{(3)}}{5}r\right)$, $a_n=\frac{\int_0^5 f(r)\cdot J_3\left(\frac{\mu_n^{(3)}}{5}r\right)\cdot r\cdot dr}{\int_0^5 J_3^2\left(\frac{\mu_n^{(3)}}{5}r\right)\cdot r\cdot dr}$.

7. $(\sin 3x+2\cdot\cos 3x)\cdot\theta(x)$.

8. $\min=2\pi(45+17\cdot\ln 2)$; $u_0(r,\varphi)=r^2+\ln r$.

Урматфиз 2005/2006. Ответы. Вариант 63.

1. $u(t,x)=\frac{1}{9}t\cdot\cos3x+x\cdot\cos3t+x+3t+\begin{cases}3+3(x-3t)+4\cdot(x-3t)^2+\sin2(x-3t)+\\+\cos2(x-3t), & (3t\le x);\\ x-3t+4e^{x-3t}, & (3t\ge x).\end{cases}$

2. $u(t,x)=t\cdot(x+1)+8\left(\operatorname{ch}2t-\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t-e^{-t}\right)\cdot\sin x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{9\pi\cdot a_n}{\gamma_n^2+1}\left(e^{-t}-\right.$ $\left.-\cos\gamma_n t+\frac{1}{\gamma_n}\sin\gamma_n t\right)\cdot\sin(2n+1)x$; $\sin2x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\sin(2n+1)x$, $a_n=$ $=(-1)^{n+1}\frac{8}{\pi\cdot(2n-1)(2n+3)}$, $\gamma_n^2=(2n+1)^2-5=4n^2+4n-4$.

3. $u(t,x,y,z)=\operatorname{ch}(2t)\cdot e^x yz+t\cdot xy^3+4t^3\cdot xy+\frac{1}{8r}\left(\operatorname{ch}(r+2t)^2-\operatorname{ch}(r-2t)^2\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. $u=r^4\cdot\sin2\varphi+r\cdot\sin\varphi-\frac{8}{3}r^2\sin2\varphi$.

5. $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $u_1(x)=(3x-5x^2)\cdot C$, $(\forall C\ne0)$; $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $u_2(x)=(3x+$ $+5x^2)\cdot C$, $(\forall C\ne0)$; при $\lambda=\lambda_1$ решение не существует; $u(x;\lambda_2)=$ $=(3x+5x^2)\cdot C+5x^2+5x^3-7x^4$, $(\forall C\in R^1)$; $u(x;\lambda)=3\cdot\lambda\cdot C_1\cdot x+$ $+5\lambda\cdot C_2\cdot x^2+5x^3-7x^4=\frac{2\lambda}{1+2\lambda}(-3x+5x^2)+5x^3-7x^4$, $(\forall\lambda\ne$ $\lambda_1;\lambda_2)$, где $C_2=-C_1=\frac{2}{1+2\lambda}$.

6. $u(t,r,\varphi)=T(t)\cdot J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2}r\right)\cdot\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\cdot J_1\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{2}r\right)\sin\varphi$, где $T(t)=\frac{1}{b_3-2}\left(e^{-2t}-e^{-b_3\cdot t}\right)$, $T_n(t)=a_n\cdot e^{-b_n\cdot t}$, $b_n=2+$ $+\left(\frac{3\cdot\mu_n^{(1)}}{2}\right)^2$; $f(r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot J_1\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{2}r\right)$, $a_n=\frac{\int_0^2 f(r)\cdot J_1\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{2}r\right)\cdot r\cdot dr}{\int_0^2 J_1^2\left(\frac{\mu_n^{(1)}}{2}r\right)\cdot r\cdot dr}$.

7. $\left(3\cdot e^{-4x}-e^{-x}\right)\cdot\theta(x)$.

8. $\min=\frac{13\pi}{3}$; $u_0(r,\varphi)=r^3\cdot\cos\varphi$.

Урматфиз 2005/2006. Ответы. Вариант 64.

1. $u(t,x)=\frac{1}{4}t\,x^4+t^4x+(x+2t)^2+\begin{cases}-1+e^{-(x-2t)}+\ln(1+x-2t), & (2t\le x);\\ -1+2\cdot(x-2t)^2+\cos 2(x-2t), & (2t\ge x).\end{cases}$

2. $u(t,x)=t+2x+(e^{-t}-\cos 5t)\cos 5x+\sum\limits_{n=0,\,n\ne 2}^{+\infty}\frac{39\pi\cdot a_n}{(2n+1)^2+1}\Big(e^{-t}-\cos(2n+1)t+\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)t\Big)\cdot\cos(2n+1)x$; $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot\cos(2n+1)x$, $a_0=\frac{2}{\pi}$, $a_n=\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{\pi\cdot n(n+1)}$ $(n\ne 0)$.

3. $u(t,x,y,z)=(8t+20x)\cdot e^{2t+x-3y}+\left(z^5+4t\cdot z^3+\frac{12}{5}t^2 z\right)e^{2t+x-3y}$

4. $u=2\sin\varphi+\frac{5}{r}\sin\varphi-\frac{\sin 3\varphi}{r^3}$.

5. $\lambda_1=-\frac{1}{\pi^2}$, $u_1(x)=(3x-2\pi\cos x)\cdot C$, $(\forall C\ne 0)$; $\lambda_2=\frac{1}{\pi^2}$, $u_2(x)=(3x+2\pi\cos x)\cdot C$, $(\forall C\ne 0)$; при $\lambda=\lambda_1$ решения не существует; $u(x;\lambda_2)=(3x+2\pi\cos x)\cdot C+4\cos x+x^2+2\pi\sin x$, $(\forall C\in\mathbb{R}^1)$; $u(x;\lambda)=\frac{3}{2}\lambda\cdot C_1\cdot x+\lambda\cdot C_2\cdot\cos x+x^2+2\pi\sin x=$
$=-\frac{6\pi\lambda}{1+\lambda\cdot\pi^2}x+\frac{4\pi^2\lambda}{1+\lambda\cdot\pi^2}\cos x+x^2+2\pi\sin x$, $(\forall\lambda\ne\lambda_1;\lambda_2)$, где $C_2=-\pi\cdot C_1=\frac{4\pi^2}{1+\lambda\cdot\pi^2}$.

6. $u(t,r,\varphi)=T(t)\cdot J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right)\sin\left(5\varphi-\frac{\pi}{3}\right)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\cdot J_5\left(\frac{\mu_n^{(5)}}{3}r\right)\cdot\sin 5\varphi$, где $T(t)=e^{-b_1\cdot t}$, $T_n(t)=\frac{a_n}{b_n}(1-e^{-b_n\cdot t})$, $b_n=2+\left(\frac{2\cdot\mu_n^{(5)}}{3}\right)^2$; $f(r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cdot J_5\left(\frac{\mu_n^{(5)}}{3}r\right)$, $a_n=\frac{\int_0^3 f(r)\cdot J_5\left(\frac{\mu_n^{(5)}}{3}r\right)\cdot r\cdot dr}{\int_0^3 J_5^2\left(\frac{\mu_n^{(5)}}{3}r\right)\cdot r\cdot dr}$.

7. $e^{-x}(3\cos 2x-2\cdot\sin 2x)\cdot\theta(x)$.

8. $\min=\frac{165\pi}{4}$; $u_0(r,\varphi)=r^2\sin\varphi$.

Инструкция к к/р по УМФ.

1. Если сведено к задаче с однородным дифференциальным уравнением – 1 очко.
   Найдено решение $x > at$ – 2 очка
   Найдено решение при $x < at$ – 2 очка
   „Сшивка" на характеристику – 1 очко.
2. Сведена к задаче с однородными краевыми условиями – 1 очко.
   Выписана задача Штурма-Лиувилля и найдены все собственные функции – 1 очко.
   Функция разложена по собственным функциям задачи – 2 очка.
   Поставлены задачи Коши для всех $T_n(t)$ – 1 очко
   За каждую из 2-х решенных задач Коши – по 1 очку
3. За каждый из трех случаев – по 2 очка.
4. За сведение к однородному уравнению – 1 очко
   Потерял производную константу в задаче Неймана – снять 1 очко.
5. За каждую верно найденную собствен. функцию – по 1 очку
   За каждое найденное решение – по 1 очку
6. За разложение $f(r)$ по функциям Бесселя – 1 очко.
   Поставлены все задачи Коши – 1 очко.
   За верное $T(t)$ – 1 очко.
   За верное $T_n(t)$ – 2 очка.
7. По усмотрению проверяющего.
8. Свел к краевой задаче. – 1 очко.
   Решил краевую задачу – 1 очко.
   Вычислил минимум функционала – 2 очка.

Задачи: №1 – 6 очков, №2 – 7 очков
№3 – 6 очков, №4 – 3 очка,
№5 – 5 очков, №6 – 5 очков
№7 – 3 очка, №8 – 4 очка.

Ответств. по 3 курсу – Карлов М. И. т. д. 615-23-73, 774-23-57 (моб)
Составитель к/р. – Мартынов В. В. т. д. 962-26-18