Московский физико-технический институт
(государственный университет)

# Семестровая контрольная работа по математическому анализу
## Курс: 1, Вариант: 1, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

---

1. Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\operatorname{arctg} x^2)^{\sqrt[3]{\cos x}}}{\log_5 \operatorname{sh} x}.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 10x^2 - 5x - 5}{(x-2)(2x^2+2x+1)}\,dx$ , б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\sqrt{x}}$

---

3. Найти $y''_{xx}(t)$ , если
$$x(t) = \ln(e^t + 1), \qquad y(t) = t + e^{-t}.$$

---

4. Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$ , если
$$y = x^2 \ln\left(1 + \frac{x}{x-1}\right).$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

5. Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (x^2 + 6x + 7)\cdot 3^{-x-1}$$
в окрестности точки $x_0 = -3$ до $o\left((x+3)^n\right)$ .

---

6. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \ln(1+x) - \dfrac{\operatorname{ch} x}{1+x^2}}{\sin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{tg} x}.$$

---

7. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) - \arcsin 2x\right)^{\frac{x^2}{(\operatorname{ch} x - 1)^2}}.$$

---

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

# Семестровая контрольная работа по математическому анализу
## Курс: 1, Вариант: 2, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

1. Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\arcsin x)^{\sqrt{\operatorname{sh} x}}}{\log_3 \operatorname{tg} 2x}.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы
а) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+2x+2}{(x+3)(x^2-x+1)}\,dx$ , б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2\sqrt{x+1}}$ .

---

3. Найти $y''_{xx}(t)$ , если
$$x(t) = \ln(\operatorname{ch} t - 1), \qquad y(t) = t + \operatorname{sh} t.$$

---

4. Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$ , если
$$y = (x^2+1)\ln(1+x(2x+3)).$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

5. Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (\frac{x^2}{2} - 2x)\cos(2x-4)$$
в окрестности точки $x_0 = 2$ до $o\left((x-2)^{2n+1}\right)$ .

---

6. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{e^{\frac{x}{x-1}} + \sin x - \cos x}.$$

---

7. Вычислить предел
$$\lim_{x\to +0} \left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\operatorname{ch} x} + \ln\left(\frac{2+x}{2}\right)\right)^{\operatorname{ctg} x^2}.$$

---

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

# Семестровая контрольная работа по математическому анализу
## Курс: 1, Вариант: 3, осенний семестр 2002/2003 уч.г.

---

1. Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\sin x^3)^{\sqrt{\operatorname{ch} x}}}{\log_7 \operatorname{arctg} x}\,.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 6}{(x-4)(2x^2+2x+3)}\,dx$ , б) $\displaystyle\int e^x \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x\,dx$

---

3. Найти $y''_{xx}(t)$ , если
$$x(t) = \ln(\cos t + 1), \qquad y(t) = t - \sin t.$$

---

4. Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$ , если
$$y = (x^2 - 1)\sin x \cos 3x.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

5. Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (x+1)\ln\frac{x^2+2x+2}{1-2x-x^2}$$
в окрестности точки $x_0 = -1$ до $o\Big((x+1)^{2n}\Big)$ .

---

6. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{\arcsin x} + \frac{\ln(1-2x)}{2}}{\operatorname{sh} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sqrt{3 + \frac{\sin x}{x}}}\,.$$

---

7. Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\Big(2e^x - \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4} - x)\Big)^{\frac{\operatorname{sh} 3x}{x^3}}\,.$$

---

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

**Семестровая контрольная работа по математическому анализу**
**Курс: 1, Вариант: 4, осенний семестр 2002/2003 уч.г.**

---

1. Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\operatorname{ch} x)^{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}}{\log_2 \operatorname{ctg} x}\ .$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы
а) $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 - 6x + 6}{(x+5)(x^2 - x + 2)}\, dx$ , б) $\displaystyle\int \operatorname{sh} 2x \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x\, dx$ .

---

3. Найти $y''_{xx}(t)$ , если
$$x(t) = \ln(1 + \sqrt{1 - t^2}), \qquad y(t) = \arcsin t - t.$$

---

4. Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$ , если
$$y = (x \cos^2 x)^2.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

5. Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (x - 1) \ln(4x - x^2)$$
в окрестности точки $x_0 = 1$ до $o\left((x-1)^n\right)$ .

---

6. Вычислить предел
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \frac{5}{6}\, x^2 + \frac{\ln \sqrt{1 - 2x}}{x}}{\sin x - \arcsin x \cdot \operatorname{ch} x}\ .$$

---

7. Вычислить предел
$$\lim_{x \to +0} \left( \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} + \operatorname{th} \frac{x}{2} \right)^{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}}\ .$$

---

## Вариант 21

2а) Разложение на дроби: $1-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2x}{2x^2+2x+1}$,

$J=x-3\ln|x-2|+\operatorname{arctg}(2x+1)-\dfrac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1)+C$.

2б) $J=2\sqrt{x}\,\operatorname{tg}\sqrt{x}+2\ln|\cos\sqrt{x}|+C$.

3) $y'_x(t)=1-e^{-2t},\quad y''_{xx}(t)=2e^{-2t}(1+e^{-t})$.

4) $y^{(n)}(x)=x^2\left((-1)^{n+1}2^n(n-1)!(2x-1)^{-n}+(-1)^n(n-1)!(x-1)^{-n}\right)+$
$+2nx\left((-1)^n2^{n-1}(n-2)!(2x-1)^{-n+1}+(-1)^{n-1}(n-2)!(x-1)^{-n+1}\right)+$
$+n(n-1)\left((-1)^{n-1}2^{n-2}(n-3)!(2x-1)^{-n+2}+(-1)^{n-2}(n-3)!(x-1)^{-n+2}\right)$.

5) $t=x+3$,

$y(t)=(t^2-2)e^{\ln 3(2-t)}=-18+(18\ln 3)t+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\cdot 9\left(\frac{(\ln 3)^{k-2}}{(k-2)!}-\frac{2(\ln 3)^k}{k!}\right)t^k+o(t^n)$.

6) $-\dfrac{8}{5}$. <u>Числитель</u> $=\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3)$, <u>Знаменатель</u> $=-\dfrac{5}{6}x^3+o(x^3)$.

$\sqrt[3]{1+3x}=1+x-x^2+\dfrac{5}{3}x^3+o(x^3)$, $\dfrac{\operatorname{ch}x}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$, $\sin(\operatorname{arctg}x)=x-\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$.

7) $e^{-3}$. $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4}-x)=1+2x+2x^2+o(x^2)$.

........................................................................................................

## Вариант 22

2а) Разложение на дроби: $1-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{x}{x^2-x+1}$,

$J=x-\ln|x+3|+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+C$.

2б) $J=2\ln|\sin\sqrt{x+1}|-2\sqrt{x+1}\operatorname{ctg}\sqrt{x+1}+C$.

3) $y'_x(t)=\operatorname{sh}t,\quad y''_{xx}(t)=\operatorname{cth}t(\operatorname{ch}t-1)$.

4) $y^{(n)}(x)=(x^2+1)\left((-1)^{n+1}2^n(n-1)!(2x+1)^{-n}+(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}\right)+$
$+2nx\left((-1)^n2^{n-1}(n-2)!(2x+1)^{-n+1}+(-1)^n(n-2)!(x+1)^{-n+1}\right)+$
$+n(n-1)\left((-1)^{n-1}2^{n-2}(n-3)!(2x+1)^{-n+2}+(-1)^{n-1}(n-3)!(x+1)^{-n+2}\right)$.

5) $t=x-2, y=(\dfrac{t^2}{2}-2)\cos 2t=-2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{2^{2k+1}}{(2k)!}+\frac{2^{2k-3}}{(2k-2)!}\right)t^{2k}+o(t^{2n+1})$.

6) $-1$. <u>Числитель</u> $=\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$, <u>Знаменатель</u> $=-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$, $e^{\frac{x}{x-1}}=1-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$.

7) $e^4$. $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})=1+2x+2x^2+o(x^2)$.

## Вариант 23

2а) Разложение на дроби: $1+\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{2x}{2x^2+2x+3}$,

$J=x+2\ln|x-4|-\dfrac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt5}+\dfrac12\ln(2x^2+2x+3)+C$ .

2б) $J=e^x\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x-\ln(e^{2x}+1)+C$ .

3) $y'_x(t)=-\sin t,\quad y''_{xx}(t)=\operatorname{ctg}t(1+\cos t)$ .

4) $y^{(n)}(x)=(x^2-1)\left(2^{2n-1}\sin(4x+\dfrac{\pi n}{2})-2^{n-1}\sin(2x+\dfrac{\pi n}{2})\right)+$
$+2nx\left(2^{2n-3}\sin(4x+\dfrac{\pi(n-1)}{2})-2^{n-2}\sin(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2})\right)+$
$+n(n-1)\left(2^{2n-5}\sin(4x+\dfrac{\pi(n-2)}{2})-2^{n-3}\sin(2x+\dfrac{\pi(n-2)}{2})\right)$ .

5) $t=x+1, y=t\ln\dfrac{t^2+1}{2-t^2}=t\left(\ln(1+t^2)-\ln2-\ln(1-\dfrac{t^2}{2})\right)=$
$=-(\ln 2)t+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}+\dfrac{1}{k2^k}\right)t^{2k+1}+o(t^{2n})$ .

6) $-8$ . <u>Числитель</u> $=-\dfrac56x^3+o(x^3)$ , <u>Знаменатель</u> $=\dfrac{5}{48}x^3+o(x^3)$ .
$xe^{\arcsin x}=x+x^2+\dfrac12x^3+o(x^3)$,
$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\sqrt{3+\dfrac{\sin x}{x}}=(\dfrac12x+\dfrac{1}{24}x^3+o(x^3))(2-\dfrac{1}{24}x^2+o(x^2))=x+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)$.

7) $e^{\frac12}$ . $\operatorname{ctg}(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2})=1-x+\dfrac12x^2+o(x^2)$ .

## Вариант 24

2а) Разложение на дроби: $1-\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{x}{x^2-x+2}$,

$J=x-2\ln|x+5|-\dfrac{1}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt7}-\dfrac12\ln(x^2-x+2)+C$ .

2б) $J=\dfrac12\operatorname{ch}2x\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x+\dfrac12\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}x+C$ .

3) $y'_x(t)=-t\ ,\ y''_{xx}(t)=\dfrac{1-t^2+\sqrt{1-t^2}}{t}$ .

4) $y^{(n)}(x)=x^2\left(2^{n-1}\cos(2x+\dfrac{\pi n}{2})+2^{2n-3}\cos(4x+\dfrac{\pi n}{2})\right)+$
$+2nx\left(2^{n-2}\cos(2x+\dfrac{\pi(n-1)}{2})+2^{2n-5}\cos(4x+\dfrac{\pi(n-1)}{2})\right)+$
$+n(n-1)\left(2^{n-3}\cos(2x+\dfrac{\pi(n-2)}{2})+2^{2n-7}\cos(4x+\dfrac{\pi(n-2)}{2})\right)$ .

5) $t=x-1\ ,\ y(t)=t(\ln(1+t)+\ln3+\ln(1-\dfrac{t}{3}))=(\ln3)t+\sum\limits_{k=2}^{n}\left[\dfrac{(-1)^k}{k-1}-\dfrac{1}{(k-1)3^{k-1}}\right]t^k+o(t^n$

6) $\dfrac95$ . <u>Числитель</u> $=-\dfrac32x^3+o(x^3)$ . <u>Знаменатель</u> $=-\dfrac56x^3+o(x^3)$ .
$e^{\operatorname{tg}x}=1+x+\dfrac12x^2+\dfrac12x^3+o(x^3)$, $\dfrac{\ln\sqrt{1-2x}}{x}=-1-x-\dfrac43x^2-2x^3+o(x^3)$.

7) $e^{-\frac12}$ . $\sqrt[3]{8+6x}=2+\dfrac12x-\dfrac18x^2+o(x^2)$, $\operatorname{ctg}(\dfrac{x}{4}-\dfrac{\pi}{4})=-1-\dfrac12x-\dfrac18x^2+o(x^2)$ .