ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Факультеты **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** **Курс** **3**

Семестр **6** **2007/2008 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$8x^2u_{xx} - 2y^2u_{yy} + 6xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y + y^{-1/2}, \quad u_x|_{x=y} = -1, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad x \geqslant 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = t^2 + (1+t)\sin t + t\cos t, \quad t \geqslant 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\ t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4}\cos\frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = x - \frac{3}{5}\cos\frac{3x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{8}{r^2}\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad r > 2, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$
$$u|_{r=2} = \sin^4\varphi, \quad |u|_{r=\infty}| < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = \cos(3t + x + y + z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = xyz\cos x, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(6|x|^2 - 2|y|^2\right)\varphi(y)\,dy + |x|^2 + \alpha, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

7.④ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{03}r), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,1]$ функции, μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 180 МФТИ - 81

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Факультеты **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** **Курс** **3**

Семестр **6** **2007/2008 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$2x^2u_{xx} - 8y^2u_{yy} + xu_x - 6yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^3 + y^{1/4}, \quad u_x|_{x=y} = 2y^2, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - te^{-x}, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2\sin x, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}, \quad x \geqslant 0;$$
$$(u - u_x)|_{x=0} = 2t + \sin t - \cos t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t, \quad t \geqslant 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\ t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + \pi^2 u + t(x-1) + x(1 - \pi^2 t) + \frac{8}{9\pi^2}t\cos\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 2\cos\pi x \cdot \cos\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{64}{r^5}\sin\varphi, \quad 1 < r < 2, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$
$$u_r|_{r=1} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad u_r|_{r=2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_{tt} - \Delta u = (t - x)\cdot e^{t-x}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = y(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \big(10|x|^2 - 6|x||y|\big)\,\varphi(y)\,dy + |x|^2 + \alpha|x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

7.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(4 + \sin 3\varphi)\cos\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = J_2\left(\frac{\mu_{24}r}{2}\right)\sin 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = f(r)\sin 4\varphi, \quad u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,2]$ функция, μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 180 МФТИ - 82

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Уравнения математической физики**

Факультеты **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** **Курс** **3**

Семестр **6** **2007/2008 уч.г.**

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши

$$9x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + 15xu_x + yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$

$$u|_{x=y} = y^2 + y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = -\frac{1}{3}y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 6t - 6, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0;$$

$$(u + u_x)|_{x=0} = (t-1)\sin t + t\cos t, \quad t \geqslant 0.$$

Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\ t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = 9u_{xx} + u - \pi(1+x) - \sin\frac{x}{2}, \quad 0 < x < 3\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi(1+x) - \frac{4}{5}\sin\frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi;$$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u_x|_{x=3\pi} = \pi, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Решить краевую задачу

$$\Delta u = \frac{16}{r^2}\sin\left(4\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$

$$u|_{r=1/2} = 8\cos^4\varphi, \quad |u|_{r=\infty}| < \infty.$$

5.⑥ Решить задачу Коши

$$u_t - \Delta u = e^{t+x+y}\cos z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = (x+y+z)\sin x, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(-4|x|^2 + 12|y|^2\right)\varphi(y)\,dy + 2\left(|x|^2 + \alpha\right), \quad |x| < 1, \quad x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

7.④ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} = \Delta u + f(r)\cos^2 3\varphi, \quad r < 2, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$

$$u|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_{04}r}{2}\right), \quad u_t|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi, \quad u|_{r=2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$, $g(r)$ — гладкие на $[0,2]$ функции, μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 180 МФТИ - 83

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Факультеты $\boxed{\text{ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ}}$ Курс $\boxed{3}$

Семестр $\boxed{6}$ 2007/2008 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу Коши
$$x^2u_{xx} - 9y^2u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0, \quad x > 1, \quad y > 1;$$
$$u|_{x=y} = y^{2/3}, \quad u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, \quad y > 1.$$

2.⑤ Решить смешанную задачу
$$u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geqslant 0;$$
$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1+t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geqslant 0.$$
Проверить, что решение принадлежит классу $C^2(x > 0\,,\ t > 0)$. Ответ обосновать.

3.⑧ Решить смешанную задачу
$$u_t = 4u_{xx} + 2u + tx - 2(x+1) - \frac{16}{\pi^2}t\sin\frac{\pi x}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 1 + x + 2\sin\frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2;$$
$$u|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=2} = 1, \quad t \geqslant 0.$$

4.④ Решить краевую задачу
$$\Delta u = \frac{18}{r^3}\sin 2\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$
$$u_r|_{r=1/2} = 28\sin^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 4\cos^2\varphi + 5.$$

5.⑥ Решить задачу Коши
$$u_{tt} - \Delta u = \frac{1}{1 + (t+x)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = yz(y - z), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

6.⑥ Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение
$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \big(-12|x|^2 + 20|x||y|\big)\,\varphi(y)\,dy + \alpha|x|^2 + |x|, \quad |x| < 1, \quad x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2)$$
разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

7.④ Решить смешанную задачу
$$u_{tt} = 4\Delta u + f(r)(2 + \sin\varphi)\sin\varphi, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = f(r), \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_{21}r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$
где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,1,2,\ldots$, $j = 1,2,3,\ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 180 МФТИ - 84

1. $\boxed{6}$ $\xi = xy^2$, $\eta = \dfrac{y^2}{x}$; $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{8\eta}u_\xi = 0 \Longrightarrow u = f(\xi)\eta^{-1/8} + g(\eta)$; $f(\xi) = \xi^{-1/8} + K_0$, $g(\eta) = \eta - K_0\eta^{-1/8}$.

Ответ: $u(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{y^2}{x}$.

2. $\boxed{5}$ $u = 2t - x^2 + v \Longrightarrow v = f(x-t) + g(x+t)$, $v|_{t=0} = 2x^2$, $v_t|_{t=0} = 0$, $(v - v_x)|_{x=0} = (t+1)\sin t + t(\cos t + t - 2)$;

$$g(\eta) = \eta^2 + K_0,\ \eta > 0 ;\ f'(\xi) - f(\xi) = (1-\xi)\sin\xi + \xi\cos\xi + K_0,\ \xi < 0 ;$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi^2 - K_0, & \xi > 0, \\ \xi\sin\xi - K_0 + K_1 e^\xi, & \xi < 0, \end{cases} ;\ f \in C \Longleftrightarrow f(+0) = f(-0) \Longrightarrow K_1 = 0 ;$$

$$\xi \longrightarrow +0 : f(\xi) = -K_0 + \xi^2 ;\ \xi \longrightarrow -0 : f(\xi) = -K_0 + \xi^2 + O(\xi^4) \Longrightarrow f \in C^2 .$$

Ответ: $u(x,t) = 2t - x^2 + (x+t)^2 + \begin{cases} (x-t)^2, & 0 \le t \le x, \\ (x-t)\sin(x-t), & 0 \le x \le t, \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2t^2 + 2t, & 0 \le t \le x, \\ (x-t)\sin(x-t) + t^2 + 2xt + 2t, & 0 \le x \le t, \end{cases}$

причем $u(x,t) \in C^2(x \ge 0, t \ge 0)$.

3. $\boxed{8}$ $u = x + v \Longrightarrow 4v_{tt} = v_{xx} + v - \dfrac{3}{4}\cos\dfrac{3}{2}x$, $v|_{t=0} = -\dfrac{3}{5}\cos\dfrac{3}{2}x$, $v_t|_{t=0} = \pi - x$, $v_x|_{x=0} = 0$, $v|_{x=\pi} = 0$;

$$X_k(x) = \cos\frac{2k+1}{2}x,\ k = 0,1,2,\dots ;\ \pi - x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x),\ a_k = \frac{8}{\pi(2k+1)^2} ;\ v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos\frac{2k+1}{2}x ;$$

$$T_0(t) = \frac{4a_0}{\sqrt{3}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{4}t ;\ T_1(t) = \frac{4a_1}{\sqrt{5}}\sin\frac{\sqrt{5}}{4}t - \frac{3}{5} ;\ k \ne 0,1 : T_k(t) = \frac{a_k}{\gamma_k}\sin\gamma_k t,\ \gamma_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4} - 1} ;$$

Ответ: $u(x,t) = x + \dfrac{32}{\pi\sqrt{3}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{3}t}{4}\cos\dfrac{x}{2} + \left[\dfrac{32}{9\pi\sqrt{5}}\sin\dfrac{\sqrt{5}t}{4} - \dfrac{3}{5}\right]\cos\dfrac{3x}{2} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{a_k}{\gamma_k}\sin\gamma_k t\,\cos\dfrac{(2k+1)x}{2}$.

4. $\boxed{4}$ $u = -\dfrac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) + v \Longrightarrow \Delta v = 0$, $v|_{r=2} = \dfrac{1}{2}\cos\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{1}{8}\cos 4\varphi$;

Ответ: $u(r,\varphi) = \left(\dfrac{8}{r^4} - \dfrac{1}{2}\right)\cos\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) + \dfrac{3}{8} - \dfrac{2}{r^2}\cos 2\varphi + \dfrac{2}{r^4}\cos 4\varphi$.

5. $\boxed{6}$ $\widehat{u} = \dfrac{1}{6}[\cos(3t+x+y+z) + \sin(3t+x+y+z)]$, $u = \widehat{u} + v \Longrightarrow v_t - \Delta v = 0$;

$$v|_{t=0} = xyz\cos x - \frac{1}{6}[\cos(x+y+z) + \sin(x+y+z)] ;$$

$$v = e^{-t}(x\cos x - 2t\sin x)\,yz - \frac{1}{6}e^{-3t}[\cos(x+y+z) + \sin(x+y+z)] ;$$

Ответ: $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{6}[\cos(3t+x+y+z) + \sin(3t+x+y+z)] + e^{-t}(x\cos x - 2t\sin x)\,yz -$
$- \dfrac{1}{6}e^{-3t}[\cos(x+y+z) + \sin(x+y+z)]$.

6. $\boxed{6}$ $\varphi(x) = 6\lambda C_1|x|^2 - 2\lambda C_2 + |x|^2 + \alpha$;

Характеристическое число $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$, собственная функция $\varphi_0 = 3|x|^2 - 1$. Для $\lambda = \lambda_0$ неоднородная система

$$\begin{cases} (1 - 3\pi\lambda)C_1 + 2\pi\lambda C_2 = \beta_1, & \beta_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi\alpha, & C_1 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}\varphi(y)dy = 2\pi\int_0^1 |y|\varphi(y)d|y|, \\ -2\pi\lambda C_1 + (1 + \pi\lambda)C_2 = \beta_2, & \beta_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi\alpha}{2}, & C_2 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}|y|^2\varphi(y)dy = 2\pi\int_0^1 |y|^3\varphi(y)d|y| \end{cases}$$

разрешима в случае $\beta_1 = \beta_2 \Longrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_0 = 3|x|^2 - 1$; $\alpha = -\dfrac{1}{3}$: $\begin{cases} \lambda \ne \lambda_0 : & \varphi = \dfrac{3|x|^2 - 1}{3(1 - \lambda\pi)}, \\ \lambda = \lambda_0 : & \varphi = (3|x|^2 - 1)K_0 + |x|^2 - \dfrac{1}{2},\ K_0 = \text{const}. \end{cases}$

7. 4 **ФОПФ**

$$\inf_{u\in \mathfrak{M}} \mathcal{T}(u) = \inf_{u\in \mathfrak{M}} \int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 - 12u)dx$$

достигается на решении задачи $\Delta u = -6$, $|x| < 1$, $u|_{|x|=1} = x_1 - 2x_2 + x_3$, т.е. на функции

$$u(x) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1 - 2x_2 + x_3 + 1 .$$

Т.к. $\nabla u = (-2x_1 + 1\,,\ -2x_2 - 2\,,\ -2x_3 + 1)$, то $|\nabla u|^2 = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 6$. Следовательно,

$$\mathcal{T}(u) = \int\limits_{|x|<1} (4|x|^2 + 6 + 12|x|^2 - 12)dx = \frac{24}{5}\pi .$$

7. 4 **ФМБФ, ФПФЭ** **Ответ:** $\mathcal{E}(t) = \theta(t)\left(\frac{1}{6}\,e^{2t} + \frac{1}{3}\,e^{-t} - \frac{1}{2}\right)$; $\frac{d^4\mathcal{E}(t)}{dt^4} = \delta'(t) + \delta(t) + \frac{\theta(t)}{3}\,(8\,e^{2t} + e^{-t})$; $\frac{d^m\mathcal{E}(t)}{dt^m}$ при $m = 0, 1, 2$ регулярные, а при $m \geq 3$ — сингулярные обобщенные функции.

7. 4 **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** $u = Q(t)\,J_0(\mu_{03}\,r) + v + w \Longrightarrow$

$$Q'' + \frac{\mu_{03}^2}{4}\,Q = 0\ ,\ Q(0) = 0\ ,\ Q'(0) = 1 \Longrightarrow Q(t) = \frac{2}{\mu_{03}}\sin\frac{\mu_{03}\,t}{2}\ ;$$

$$4v_{tt} = \Delta v + \frac{f(r)}{2} - \frac{f(r)\cos 4\varphi}{2}\ ,\ v|_{t=0} = 0\ ,\ v_t|_{t=0} = 0\ ;$$

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} T_{0j}(t)\,J_0(\mu_{0j}\,r) + \sum_{j=1}^{\infty} T_{4j}(t)\,J_4(\mu_{4j}\,r)\cos 4\varphi\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j}\,J_0(\mu_{0j}\,r)\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{4j}\,J_4(\mu_{4j}\,r) \Longrightarrow$$

$$T''_{0j} + \frac{\mu_{0j}^2}{4}\,T_{0j} = \frac{a_{0j}}{8}\ ,\ T_{0j}(0) = 0\ ,\ T'_{0j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{0j}(t) = \frac{a_{0j}}{2\,\mu_{0j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{0j}\,t}{2}\right)\ ;$$

$$T''_{4j} + \frac{\mu_{4j}^2}{4}\,T_{4j} = -\frac{a_{4j}}{8}\ ,\ T_{4j}(0) = 0\ ,\ T'_{4j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{4j}(t) = \frac{a_{4j}}{2\,\mu_{4j}^2}\left(\cos\frac{\mu_{4j}\,t}{2} - 1\right)\ ;$$

$$4w_{tt} = \Delta w\ ,\ w|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi\ ,\ w_t|_{t=0} = 0\ ;$$

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(t)\,J_2(\mu_{2j}\,r)\cos 2\varphi\ ,\ g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}\,J_2(\mu_{2j}\,r) \Longrightarrow$$

$$T''_{2j} + \frac{\mu_{2j}^2}{4}\,T_{2j} = 0\ ,\ T_{2j}(0) = a_{2j}\ ,\ T'_{2j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{2j}(t) = a_{2j}\cos\frac{\mu_{2j}\,t}{2}\ ;$$

$$a_{0j} = \frac{\int_0^1 f(r)\,J_0(\mu_{0j}\,r)\,r\,dr}{\int_0^1 J_0^2(\mu_{0j}\,r)\,r\,dr}\ ,\ a_{4j} = \frac{\int_0^1 f(r)\,J_4(\mu_{4j}\,r)\,r\,dr}{\int_0^1 J_4^2(\mu_{4j}\,r)\,r\,dr}\ ,\ a_{2j} = \frac{\int_0^1 g(r)\,J_2(\mu_{2j}\,r)\,r\,dr}{\int_0^1 J_2^2(\mu_{2j}\,r)\,r\,dr}\ .$$

Ответ: $u(r,\varphi,t) = \left[\frac{2}{\mu_{03}}\sin\frac{\mu_{03}\,t}{2} + \frac{a_{03}}{2\,\mu_{03}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{03}\,t}{2}\right)\right] J_0(\mu_{03}\,r) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 3}}^{\infty} \frac{a_{0j}}{2\,\mu_{0j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{0j}\,t}{2}\right) J_0(\mu_{0j}\,r) +$

$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}\cos\frac{\mu_{2j}\,t}{2}\,J_2(\mu_{2j}\,r)\cos 2\varphi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{4j}}{2\,\mu_{4j}^2}\left(\cos\frac{\mu_{4j}\,t}{2} - 1\right) J_4(\mu_{4j}\,r)\cos 4\varphi$

1. $\boxed{6}$ $\xi = x^2 y$, $\eta = \dfrac{x^2}{y}$; $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{8\xi}u_\eta = 0 \Longrightarrow u = f(\xi) + g(\eta)\xi^{1/8}$; $f(\xi) = \xi - K_0\xi^{1/8}$, $g(\eta) = \eta^{-1/8} + K_0$.

Ответ: $u(x,y) = x^2y + y^{1/4}$.

2. $\boxed{5}$ $u = te^{-x} + v \Longrightarrow v = f(x-t) + g(x+t)$, $v|_{t=0} = 2\sin x$, $v_t|_{t=0} = 0$, $(v - v_x)|_{x=0} = \sin t - \cos t - \cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$;

$$g(\eta) = \sin\eta + K_0\ ,\ \eta > 0\ ;\ f'(\xi) - f(\xi) = K_0 + \cos 2\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi\ ,\ \xi < 0\ ;$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \sin\xi - K_0\,, & \xi > 0\,, \\ \frac{1}{2}\sin 2\xi - K_0 + K_1 e^{\xi}\,, & \xi < 0\,, \end{cases}\ ;\ f \in C \Longleftrightarrow f(+0) = f(-0) \Longrightarrow K_1 = 0\ ;$$

$$\xi \longrightarrow +0\ :\ f(\xi) = -K_0 + \xi + O(\xi^3)\ ;\ \xi \longrightarrow -0\ :\ f(\xi) = -K_0 + \xi + O(\xi^3) \Longrightarrow f \in C^2\ .$$

Ответ: $u(x,t) = te^{-x} + \sin(x+t) + \begin{cases} \sin(x-t)\,, & 0 \le t \le x\,, \\ \frac{1}{2}\sin 2(x-t)\,, & 0 \le x \le t\,, \end{cases}$ причем $u(x,t) \in C^2(x \ge 0\,,\ t \ge 0)$.

3. $\boxed{8}$ $u = xt + v \Longrightarrow v_t = v_{xx} + \pi^2 v + t(x-1) + \dfrac{8}{9\pi^2}t\cos\dfrac{3\pi}{2}x$, $v|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi}{2}x$, $v_x|_{x=0} = 0$, $v|_{x=1} = 0$;

$X_k(x) = \cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2}x$, $k = 0,1,2,\ldots$; $x - 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x)$, $a_k = -\dfrac{8}{\pi^2(2k+1)^2}$; $v(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2}x$;

$T_0(t) = \left[1 + \dfrac{16a_0}{9\pi^4}\right]e^{3\pi^2 t/4} - \dfrac{4a_0}{3\pi^2}\left[t + \dfrac{4}{3\pi^2}\right]$; $T_1(t) \equiv 0$; $k \ne 0,1$: $T_k(t) = \dfrac{a_k}{\gamma_k^2}\left[e^{-\gamma_k t} - 1\right] + \dfrac{a_k t}{\gamma_k}$, $\gamma_k = \pi^2\left[\dfrac{(2k+1)^2}{4} - 1\right]$;

Ответ: $u(x,t) = xt + \left\{\left[1 - \dfrac{128}{9\pi^6}\right]e^{3\pi^2 t/4} - \dfrac{32}{3\pi^4}\left[t + \dfrac{4}{3\pi^2}\right]\right\}\cos\dfrac{\pi x}{2} - \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{a_k}{\gamma_k^2}\left[e^{-\gamma_k t} - 1 + \gamma_k t\right]\cos\dfrac{\pi(2k+1)x}{2}$.

4. $\boxed{4}$ $u = \dfrac{8}{r^3}\sin\varphi + v \Longrightarrow \Delta v = 0$, $v_r|_{r=1} = 24\sin\varphi + \cos\varphi + 1$, $v_r|_{r=2} = \dfrac{3}{2}\sin\varphi - \dfrac{1}{2}\cos\varphi + \dfrac{1}{2}$;

Ответ: $u(r,\varphi) = \left(\dfrac{8}{r^3} - \dfrac{30}{r} - 6r\right)\sin\varphi - \left(\dfrac{2}{r} + r\right)\cos\varphi + \ln r + K_0$.

5. $\boxed{6}$

$$\widehat{u} = \frac{t}{2}(t - x - 1)e^{t-x}\ ,\ u = \widehat{u} + v \Longrightarrow v_{tt} - \Delta v = 0\ ;$$

$$v|_{t=0} = y(y^2 - z^2)\ ,\ v_t|_{t=0} = \frac{x+1}{2}e^{-x}\ ;$$

$$v = y(y^2 - z^2) + 2t^2 y + \frac{1}{4}\left[e^{t-x}(x - t + 2) - e^{-x-t}(x + t + 2)\right]\ ;$$

Ответ: $u(x,y,z,t) = \dfrac{t}{2}(t - x - 1)e^{t-x} + y\left(y^2 - z^2 + 2t^2\right) + \dfrac{1}{4}\left[e^{t-x}(x - t + 2) - e^{-x-t}(x + t + 2)\right]$.

6. $\boxed{6}$

$$\varphi(x) = 10\lambda C_1|x|^2 - 6\lambda C_2|x| + |x|^2 + \alpha|x|\ ;$$

Характеристическое число $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$, собственная функция $\varphi_0 = 5|x|^2 - 3|x|$. Для $\lambda = \lambda_0$ неоднородная система

$$\begin{cases} (1 - 5\pi\lambda)C_1 + 4\pi\lambda C_2 = \beta_1\,, & \beta_1 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi\alpha}{3}\ ,\ C_1 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|\varphi(y)d|y|\,, \\ -4\pi\lambda C_1 + (1 + 3\pi\lambda)C_2 = \beta_2\,, & \beta_2 = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{\pi\alpha}{2}\ ,\ C_2 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}|y|\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|^2\varphi(y)d|y| \end{cases}$$

разрешима в случае $\beta_1 = \beta_2 \Longrightarrow \alpha = -\dfrac{3}{5}$.

Ответ: $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$, $\varphi_0 = 5|x|^2 - 3|x|$; $\alpha = -\dfrac{3}{5}$: $\begin{cases} \lambda \ne \lambda_0\ :\ \ \varphi = \dfrac{5|x|^2 - 3|x|}{5(1 - \lambda\pi)}\,, \\ \lambda = \lambda_0\ :\ \ \varphi = (5|x|^2 - 3|x|)K_0 + |x|^2 - \dfrac{3}{4}|x|\ ,\ K_0 = \mathrm{const}\,. \end{cases}$

7. $\boxed{4}$ **ФОПФ**

$$\inf_{u\in\mathfrak{M}} \mathcal{T}(u) = \inf_{u\in\mathfrak{M}} \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx$$

достигается на решении задачи $\triangle u = 0$, $|x| < 1$, $u|_{|x|=1} = x_1^2$, т.е. на функции

$$u(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2 .$$

Т.к. $\nabla u = \left(\frac{4}{3}x_1 , -\frac{2}{3}x_2 , -\frac{2}{3}x_3\right)$, то

$$\mathcal{T}(u) = \int\limits_{|x|<1} \frac{24}{9}x_3^2 dx = \frac{32}{45}\pi .$$

7. $\boxed{4}$ **ФМБФ, ФПФЭ** **Ответ:** $\mathcal{E}(t) = \theta(t) \left(\frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{d^4\mathcal{E}(t)}{dt^4} = \delta'(t) - 2\delta(t) + \frac{\theta(t)}{4}\,\left(27\,\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{t}\right)$;
$\frac{d^m\mathcal{E}(t)}{dt^m}$ при $m = 0,1,2$ регулярные, а при $m \geq 3$ — сингулярные обобщенные функции.

7. $\boxed{4}$ **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** $u = Q(t)\, J_2\left(\frac{\mu_{24}\, r}{2}\right) \sin 2\varphi + v + w \Longrightarrow$

$$Q'' + \mu_{24}^2 Q = 0 \ , \ Q(0) = 1 \ , \ Q'(0) = 0 \Longrightarrow Q(t) = \cos\mu_{24} t \ ;$$

$$v_{tt} = 4 \triangle v + 4f(r)\cos\varphi + \frac{f(r)\sin 2\varphi}{2} + \frac{f(r)\sin 4\varphi}{2} \ , \ v|_{t=0} = 0 \ , \ v_t|_{t=0} = 0 \ ;$$

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}(t)\, J_1\left(\frac{\mu_{1j}\, r}{2}\right)\cos\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(t)\, J_2\left(\frac{\mu_{2j}\, r}{2}\right)\sin 2\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} T_{4j}(t)\, J_4\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right)\sin 4\varphi \ ;$$

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\, J_1\left(\frac{\mu_{1j}\, r}{2}\right) \ , \ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}\, J_2\left(\frac{\mu_{2j}\, r}{2}\right) \ , \ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{4j}\, J_4\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$T''_{1j} + \mu_{1j}^2\, T_{0j} = 4a_{1j} \ , \ T_{1j}(0) = 0 \ , \ T'_{1j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{1j}(t) = \frac{4\, a_{1j}}{\mu_{1j}^2}\,(1 - \cos\mu_{1j}\, t) \ ;$$

$$T''_{2j} + \mu_{2j}^2\, T_{2j} = \frac{a_{2j}}{2} \ , \ T_{2j}(0) = 0 \ , \ T'_{2j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{2j}(t) = \frac{a_{2j}}{2\,\mu_{2j}^2}\,(1 - \cos\mu_{2j}\, t) \ ;$$

$$T''_{4j} + \mu_{4j}^2\, T_{4j} = \frac{a_{4j}}{2} \ , \ T_{4j}(0) = 0 \ , \ T'_{4j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{4j}(t) = \frac{a_{4j}}{2\,\mu_{4j}^2}\,(1 - \cos\mu_{4j}\, t) \ ;$$

$$w_{tt} = 4\triangle w \ , \ w|_{t=0} = 0 \ , \ w_t|_{t=0} = f(r)\sin 4\varphi \ ;$$

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} R_{4j}(t)\, J_3\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right)\sin 4\varphi \Longrightarrow$$

$$R''_{4j} + \mu_{4j}^2\, R_{4j} = 0 \ , \ R_{4j}(0) = 0 \ , \ R'_{4j}(0) = a_{4j} \Longrightarrow R_{4j}(t) = \frac{a_{4j}}{\mu_{4j}}\sin\mu_{4j}\, t \ ;$$

$$a_{1j} = \frac{\int_0^2 f(r)\, J_1\left(\frac{\mu_{1j}\, r}{2}\right) r\, dr}{\int_0^2 J_1^2\left(\frac{\mu_{1j}\, r}{2}\right) r\, dr} \ , \ a_{2j} = \frac{\int_0^2 f(r)\, J_2\left(\frac{\mu_{2j}\, r}{2}\right) r\, dr}{\int_0^2 J_2^2\left(\frac{\mu_{2j}\, r}{2}\right) r\, dr} \ , \ a_{4j} = \frac{\int_0^2 f(r)\, J_4\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right) r\, dr}{\int_0^2 J_4^2\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right) r\, dr} .$$

Ответ: $u(r,\varphi,t) = \left[\cos\mu_{24}\, t + \frac{a_{24}}{2\,\mu_{24}^2}\,(1 - \cos\mu_{24}\, t)\right] J_2\left(\frac{\mu_{24}\, r}{2}\right)\sin 2\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\, a_{1j}}{\mu_{1j}^2}\,(1 - \cos\mu_{1j}\, t)\, J_1\left(\frac{\mu_{1j}\, r}{2}\right)\cos\varphi +$

$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 4}}^{\infty} \frac{a_{2j}}{2\,\mu_{2j}^2}\,(1 - \cos\mu_{2j}\, t)\, J_2\left(\frac{\mu_{2j}\, r}{2}\right)\sin 2\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} a_{4j}\left(\frac{\sin\mu_{4j}\, t}{\mu_{4j}} + \frac{1 - \cos\mu_{4j}\, t}{2\mu_{4j}^2}\right) J_4\left(\frac{\mu_{4j}\, r}{2}\right)\sin 4\varphi$

1. $\boxed{6}$ $\xi = xy^3\ ,\ \eta = \dfrac{y^3}{x}\ ;\ u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{3\eta}u_\xi = 0 \Longrightarrow u = f(\xi)\eta^{1/3} + g(\eta)\ ;\ f(\xi) = \xi^{1/3} + K_0\ ,\ g(\eta) = \eta^{1/3} - K_0\eta^{1/3}\ .$

Ответ: $u(x,y) = y^2 + \dfrac{y}{x^{1/3}}$.

---

2. $\boxed{5}$ $u = -t^3 - 3t^2 + v \Longrightarrow v = f(x-t) + g(x+t)\ ,\ v|_{t=0} = 2x^3\ ,\ v_t|_{t=0} = 0\ ,\ (v - v_x)|_{x=0} = t^3 + 3t^2 + (t-1)\sin t + t\cos t\ ;$

$$g(\eta) = \eta^3 + K_0\ ,\ \eta > 0\ ;\ f'(\xi) + f(\xi) = -K_0 + (\xi+1)\sin\xi - \xi\cos\xi\ ,\ \xi < 0\ ;$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \xi^3 - K_0\,, & \xi > 0\,, \\ \sin\xi - \xi\cos\xi - K_0 + K_1 e^{-\xi}\,, & \xi < 0\,, \end{cases}\ ;\ f \in C \Longleftrightarrow f(+0) = f(-0) \Longrightarrow K_1 = 0\ ;$$

$$\xi \longrightarrow +0\ :\ f(\xi) = -K_0 + \xi^3\ ;\ \xi \longrightarrow -0\ :\ f(\xi) = -K_0 + O(\xi^3) \Longrightarrow f \in C^2\ .$$

Ответ: $u(x,t) = -t^3 - 3t^2 + (x+t)^3 + \begin{cases} (x-t)^3\,, & 0 \le t \le x\,, \\ \sin(x-t) - (x-t)\cos(x-t)\,, & 0 \le x \le t\,, \end{cases} =$

$= \begin{cases} 2x^3 - t^3 + 6xt^2 - 3t^2\,, & 0 \le t \le x\,, \\ x^3 + 3x^2t + 3xt^2 - 3t^2 + \sin(x-t) - (x-t)\cos(x-t)\,, & 0 \le x \le t\,, \end{cases}$ причем $u(x,t) \in C^2(x \ge 0\,,\, t \ge 0)$.

---

3. $\boxed{8}$ $u = \pi(1+x) + v \Longrightarrow v_{tt} = 9v_{xx} + v - \sin\dfrac{x}{2}\ ,\ v|_{t=0} = -\dfrac{4}{5}\sin\dfrac{x}{2}\ ,\ v_t|_{t=0} = x\ ,\ v|_{x=0} = 0\ ,\ v_x|_{x=3\pi} = 0\ ;$

$$X_k(x) = \sin\frac{2k+1}{6}x\ ,\ k = 0,1,2,\dots\ ;\ x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x)\ ,\ a_k = \frac{24(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}\ ;\ v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{2k+1}{6}x\ ;$$

$$T_0(t) = \frac{2a_0}{\sqrt3}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt3}{2}t\ ;\ T_1(t) = \frac{2a_1}{\sqrt5}\sin\frac{\sqrt5}{2}t - \frac{4}{5}\ ;\ k \ne 0,1\ :\ T_k(t) = \frac{a_k}{\gamma_k}\sin\gamma_k t\ ,\ \gamma_k = \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4} - 1}\ ;$$

Ответ: $u(x,t) = \pi(1+x) + \dfrac{48}{\pi\sqrt3}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt3 t}{2}\,\sin\dfrac{x}{6} - \left[\dfrac{16}{3\pi\sqrt5}\sin\dfrac{\sqrt5 t}{2} + \dfrac{4}{5}\right]\sin\dfrac{x}{2} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{a_k}{\gamma_k}\sin\gamma_k t\,\sin\dfrac{(2k+1)x}{6}$.

---

4. $\boxed{4}$ $u = -\sin\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right) + v \Longrightarrow \Delta v = 0\ ,\ v|_{r=1/2} = \sin\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right) + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + 3\ ;$

Ответ: $u(r,\varphi) = \left(\dfrac{1}{16r^4} - 1\right)\sin\left(4\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3 + \dfrac{1}{r^2}\cos 2\varphi + \dfrac{1}{16r^4}\cos 4\varphi$.

---

5. $\boxed{6}$

$$\widehat{u} = te^{t+x+y}\cos z\ ,\ u = \widehat{u} + v \Longrightarrow v_t - \Delta v = 0\ ;$$

$$v|_{t=0} = (x+y+z)\sin x\ ;$$

$$v = e^{-t}\left[(x+y+z)\sin x + 2t\cos x)\right]\ ;$$

Ответ: $u(x,y,z,t) = te^{t+x+y}\cos z + e^{-t}\left[(x+y+z)\sin x + 2t\cos x\right]$.

---

6. $\boxed{6}$

$$\varphi(x) = -4\lambda C_1|x|^2 + 12\lambda C_2 + 2(|x|^2 + \alpha)\ ;$$

Характеристическое число $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$, собственная функция $\varphi_0 = |x|^2 - 1$. Для $\lambda = \lambda_0$ неоднородная система

$$\begin{cases} (1+2\pi\lambda)C_1 - 12\pi\lambda C_2 = \beta_1\,, & \beta_1 = \pi + 2\pi\alpha\ ,\quad C_1 = \int\limits_{|y|<1}\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|\varphi(y)d|y|\,, \\ 4\pi\lambda C_1 + 3(1-6\pi\lambda)C_2 = \beta_2\,, & \beta_2 = 2\pi + 3\pi\alpha\ ,\quad C_2 = \int\limits_{|y|<1}|y|^2\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|^3\varphi(y)d|y| \end{cases}$$

разрешима в случае $\beta_1 = \beta_2 \Longrightarrow \alpha = -1$.

Ответ: $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$, $\varphi_0 = |x|^2 - 1$; $\alpha = -1$: $\begin{cases} \lambda \ne \lambda_0 : & \varphi = 2\dfrac{|x|^2 - 1}{1 - 2\lambda\pi}\,, \\ \lambda = \lambda_0 : & \varphi = (|x|^2 - 1)K_0 + |x|^2\ ,\ K_0 = \mathrm{const}\,. \end{cases}$

7.$\boxed{4}$ $\boxed{\text{ФОПФ}}$

$$\inf_{u\in\mathfrak{m}} \mathcal{T}(u) = \inf_{u\in\mathfrak{m}} \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx$$

достигается на решении задачи $\Delta u = 0$, $|x| < 1$, $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, т.е. на функции

$$u(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^2 + \frac{2}{3}x_2^2 - \frac{4}{3}x_3^2 .$$

Т.к. $\nabla u = \left(\frac{4}{3}x_1 , \frac{4}{3}x_2 , -\frac{8}{3}x_3\right)$, то

$$\mathcal{T}(u) = \int\limits_{|x|<1} \frac{32}{3}x_3^2 dx = \frac{128}{45}\pi .$$

7.$\boxed{4}$ $\boxed{\text{ФМБФ, ФПФЭ}}$ **Ответ:** $\mathcal{E}(t) = \theta(t)\left(\frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{d^4\mathcal{E}(t)}{dt^4} = \delta'(t) + 2\delta(t) + \frac{\theta(t)}{4}\left(27\,\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}\right)$; $\frac{d^m\mathcal{E}(t)}{dt^m}$ при $m = 0,1,2$ регулярные, а при $m \geq 3$ — сингулярные обобщенные функции.

7.$\boxed{4}$ $\boxed{\text{ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ}}$ $u = Q(t)\,J_0\left(\frac{\mu_{03}\,r}{2}\right) + v + w \Longrightarrow$

$$Q'' + \frac{\mu_{04}^2}{16}\,Q = 0\ ,\ Q(0) = 1\ ,\ Q'(0) = 0 \Longrightarrow Q(t) = \cos\frac{\mu_{04}\,t}{4}\ ;$$

$$4v_{tt} = \Delta v + \frac{f(r)}{2} + \frac{f(r)\cos 6\varphi}{2}\ ,\ v|_{t=0} = 0\ ,\ v_t|_{t=0} = 0\ ;$$

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} T_{0j}(t)\,J_0\left(\frac{\mu_{0j}\,r}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} T_{6j}(t)\,J_6\left(\frac{\mu_{6j}\,r}{2}\right)\cos 6\varphi\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j}\,J_0\left(\frac{\mu_{0j}\,r}{2}\right)\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{6j}\,J_6\left(\frac{\mu_{6j}\,r}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$T''_{0j} + \frac{\mu_{0j}^2}{16}\,T_{0j} = \frac{a_{0j}}{8}\ ,\ T_{0j}(0) = 0\ ,\ T'_{0j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{0j}(t) = \frac{2\,a_{0j}}{\mu_{0j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{0j}\,t}{4}\right)\ ;$$

$$T''_{6j} + \frac{\mu_{6j}^2}{16}\,T_{6j} = \frac{a_{6j}}{8}\ ,\ T_{6j}(0) = 0\ ,\ T'_{6j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{6j}(t) = \frac{2\,a_{6j}}{\mu_{6j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{6j}\,t}{4}\right)\ ;$$

$$4w_{tt} = \Delta w\ ,\ w|_{t=0} = 0\ ,\ w_t|_{t=0} = g(r)\sin 3\varphi\ ;$$

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} T_{3j}(t)\,J_3\left(\frac{\mu_{3j}\,r}{2}\right)\sin 3\varphi\ ,\ g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{3j}\,J_3\left(\frac{\mu_{3j}\,r}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$T''_{3j} + \frac{\mu_{3j}^2}{16}\,T_{3j} = 0\ ,\ T_{3j}(0) = 0\ ,\ T'_{3j}(0) = a_{3j} \Longrightarrow T_{3j}(t) = \frac{4\,b_{3j}}{\mu_{3j}}\sin\frac{\mu_{3j}\,t}{4}\ ;$$

$$a_{0j} = \frac{\int_0^2 f(r)\,J_0\left(\frac{\mu_{0j}\,r}{2}\right)r\,dr}{\int_0^2 J_0^2\left(\frac{\mu_{0j}\,r}{2}\right)r\,dr}\ ,\ a_{6j} = \frac{\int_0^2 f(r)\,J_6\left(\frac{\mu_{6j}\,r}{2}\right)r\,dr}{\int_0^2 J_6^2\left(\frac{\mu_{6j}\,r}{2}\right)r\,dr}\ ,\ a_{3j} = \frac{\int_0^2 g(r)\,J_3\left(\frac{\mu_{3j}\,r}{2}\right)r\,dr}{\int_0^2 J_3^2\left(\frac{\mu_{3j}\,r}{3}\right)r\,dr}\ .$$

Ответ: $u(r,\varphi,t) = \left[\cos\frac{\mu_{04}\,t}{4} + \frac{2\,a_{04}}{\mu_{04}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{04}\,t}{4}\right)\right]J_0\left(\frac{\mu_{04}\,r}{2}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{\infty}\frac{2\,a_{0j}}{\mu_{0j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{0j}\,t}{4}\right)J_0\left(\frac{\mu_{0j}\,r}{2}\right) +$

$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{4\,a_{3j}}{\mu_{3j}}\sin\frac{\mu_{3j}\,t}{4}\,J_3\left(\frac{\mu_{3j}\,r}{2}\right)\sin 3\varphi + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\,a_{6j}}{\mu_{6j}^2}\left(1 - \cos\frac{\mu_{6j}\,t}{4}\right)J_6\left(\frac{\mu_{6j}\,r}{2}\right)\cos 6\varphi$

1. $\boxed{6}$ $\xi = x^3 y$, $\eta = \dfrac{x^3}{y}$; $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{3\eta} u_\xi = 0 \Longrightarrow u = f(\xi)\eta^{-1/3} + g(\eta)$; $f(\xi) = \xi^{-1/3} + K_0$, $g(\eta) = -\eta^{-1} + \eta^{1/3} - K_0\eta^{-1/3}$.

Ответ: $u(x,y) = \dfrac{x}{y^{1/3}} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x^3}$.

---

2. $\boxed{5}$

$$u = x\mathrm{e}^t + v \Longrightarrow v = f(x-t) + g(x+t) \ , \ v|_{t=0} = 1 \ , \ v_t|_{t=0} = 4 - 6x \ , \ (v - v_x)|_{x=0} = t\mathrm{e}^t + 2 + t - 3t^2 \ ;$$

$$g(\eta) = 2\eta - \frac{3}{2}\eta^2 + K_0 \ , \ \eta > 0 \ ; \ f'(\xi) + 2f(\xi) = -2K_0 - \xi\mathrm{e}^{-\xi} \ , \ \xi < 0 \ ;$$

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 - 2\xi + \frac{3}{2}\xi^2 - K_0 \,, & \xi > 0 \,, \\ -K_0 + K_1\mathrm{e}^{-2\xi} + (1-\xi)\,\mathrm{e}^{-\xi} \,, & \xi < 0 \,, \end{cases} \ ; \ f \in C \Longleftrightarrow f(+0) = f(-0) \Longrightarrow K_1 = 0 \ ;$$

$$\xi \longrightarrow +0 \ : \ f(\xi) = 1 - K_0 - 2\xi + \frac{3}{2}\xi^2 \ ; \ \xi \longrightarrow -0 \ : \ f(\xi) = 1 - K_0 - 2\xi + \frac{3}{2}\xi^2 + O(\xi^3) \Longrightarrow f \in C^2 \ .$$

Ответ: $u(x,t) = x\mathrm{e}^t + 2(x+t) - \dfrac{3}{2}(x+t)^2 + \begin{cases} 1 - 2(x-t) + \frac{3}{2}(x-t)^2 \,, & 0 \le t \le x \,, \\ (1 + t - x)\,\mathrm{e}^{t-x} \,, & 0 \le x \le t \,, \end{cases} =$

$= \begin{cases} x\mathrm{e}^t + 1 + 4t - 6xt \,, & 0 \le t \le x \,, \\ x\mathrm{e}^t + 2(x+t) - \frac{3}{2}(x+t)^2 + (1+t-x)\,\mathrm{e}^{t-x} \,, & 0 \le x \le t \,, \end{cases}$ причем $u(x,t) \in \mathrm{C}^2(x \ge 0 \,, \, t \ge 0)$.

---

3. $\boxed{8}$

$$u = x + 1 + v \Longrightarrow v_t = 4v_{xx} + 2v + tx - \frac{16}{\pi^2}t\sin\frac{\pi}{4}x \ , \ v|_{t=0} = 2\sin\frac{3\pi}{4}x \ , \ v|_{x=0} = 0 \ , \ v_x|_{x=2} = 0 \ ;$$

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi(2k+1)}{4}x \ , \ k = 0,1,2,\ldots \ ; \ x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x) \ , \ a_k = \frac{16(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \ ; \ v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{\pi(2k+1)}{4}x \ ;$$

$$T_0(t) \equiv 0 \ ; \ T_1(t) = \left[2 + \frac{a_1}{\gamma_1^2}\right]\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} + \frac{a_1}{\gamma_1^2}\left[\gamma_1 t - 1\right] \ ; \ k \ne 0,1 \ : \ T_k(t) = \frac{a_k}{\gamma_k^2}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_k t} - 1\right] + \frac{a_k t}{\gamma_k} \ , \ \gamma_k = \frac{\pi^2(2k+1)^2}{4} - 2 \ ;$$

Ответ: $u(x,t) = 1 + x + \left\{\left[2 + \dfrac{a_1}{\gamma_1^2}\right]\mathrm{e}^{-\gamma_1 t} + \dfrac{a_1}{\gamma_1^2}\left[\gamma_1 t - 1\right]\right\}\sin\dfrac{3\pi x}{4} + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{a_k}{\gamma_k^2}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_k t} - 1 + \gamma_k t\right]\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{4}$.

---

4. $\boxed{4}$

$$u = -\frac{6}{r}\sin 2\varphi + v \Longrightarrow \Delta v = 0 \ , \ v_r|_{r=1/2} = -24\sin 2\varphi - 14\cos 2\varphi + 14 \ , \ v_r|_{r=1} = -6\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi + 7 \ ;$$

Ответ: $u(r,\varphi) = \left(\dfrac{7}{5r^2} - \dfrac{6}{r} - \dfrac{8r^2}{5}\right)\sin 2\varphi + \left(\dfrac{1}{r^2} + 2r^2\right)\cos 2\varphi + 7\ln r + K_0$.

---

5. $\boxed{6}$

$$\widehat{u} = \frac{t}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x+t) \ , \ u = \widehat{u} + v \Longrightarrow v_{tt} - \Delta v = 0 \ ;$$

$$v|_{t=0} = yz(y-z) \ , \ v_t|_{t=0} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x \ ;$$

$$v = yz(y-z) + t^2(z-y) - \frac{1}{4}\left[(x+t)\,\mathrm{arctg}\,(x+t) - (x-t)\,\mathrm{arctg}\,(x-t)\right] + \frac{1}{8}\ln\frac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2} \ ;$$

Ответ: $u(x,y,z,t) = (y-z)(yz-t^2) + \dfrac{1}{4}(x-t)\left[\mathrm{arctg}\,(x-t) - \mathrm{arctg}\,(x+t)\right] + \dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2}$.

---

6. $\boxed{6}$

$$\varphi(x) = -12\lambda C_1|x|^2 + 20\lambda C_2|x| + \alpha|x|^2 + |x| \ ;$$

Характеристическое число $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$, собственная функция $\varphi_0 = |x|^2 - |x|$. Для $\lambda = \lambda_0$ неоднородная система

$$\begin{cases} (3 + 18\pi\lambda)C_1 - 40\pi\lambda C_2 = \beta_1 \,, & \beta_1 = \dfrac{3\pi\alpha}{2} + 2\pi \ , \ C_1 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|\varphi(y)d|y| \,, \\ 24\pi\lambda C_1 + 5(1 - 10\pi\lambda)C_2 = \beta_2 \,, & \beta_2 = 2\pi\alpha + \dfrac{5\pi}{2} \ , \ C_2 = \displaystyle\int\limits_{|y|<1}|y|\varphi(y)dy = 2\pi\int\limits_0^1 |y|^2\varphi(y)d|y| \end{cases}$$

разрешима в случае $\beta_1 = \beta_2 \Longrightarrow \alpha = -1$.

Ответ: $\lambda_0 = \dfrac{1}{2\pi}$, $\varphi_0 = |x|^2 - |x|$; $\alpha = -1$: $\begin{cases} \lambda \ne \lambda_0 : & \varphi = \dfrac{|x| - |x|^2}{1 - 2\lambda\pi} \,, \\ \lambda = \lambda_0 : & \varphi = (|x|^2 - |x|)K_0 + |x|^2 - \dfrac{5}{4}|x| \ , \ K_0 = \mathrm{const} \,. \end{cases}$

---

7. $\boxed{4}$ **ФОПФ**

$$\inf_{u\in m} \mathcal{T}(u) = \inf_{u\in m} \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx$$

достигается на решении задачи $\Delta u = 0$, $|x| < 1$, $u|_{|x|=1} = x_1x_2 + x_3^2$, т.е. на функции

$$u(x) = \frac{1}{3} + x_1x_2 - \frac{1}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{2}{3}x_3^2$$

Т.к. $\nabla u = \left(x_2 - \frac{2}{3}x_1 \, , \, x_1 - \frac{2}{3}x_2 \, , \, \frac{4}{3}x_3\right)$, то $|\nabla u|^2 = \frac{13}{9}x_1^2 + \frac{13}{9}x_2^2 + \frac{16}{9}x_3^2 - \frac{8}{3}x_1x_2$. Следовательно,
$\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx = \int\limits_{|x|<1} \frac{42}{9}x_3^2 dx = \frac{56}{45}\pi$. **Ответ:** $\inf\limits_{u\in m} \int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx = \frac{56}{45}\pi$.

---

7. $\boxed{4}$ **ФМБФ, ФПФЭ** **Ответ:** $\mathcal{E}(t) = \theta(t)\left(\frac{1}{6}\,e^{-2t} + \frac{1}{3}\,e^{t} - \frac{1}{2}\right)$; $\frac{d^4\mathcal{E}(t)}{dt^4} = \delta'(t) - \delta(t) + \frac{\theta(t)}{3}\,(8\,e^{-2t} + e^t)$;
$\frac{d^m\mathcal{E}(t)}{dt^m}$ при $m = 0,1,2$ регулярные, а при $m \geq 3$ — сингулярные обобщенные функции.

---

7. $\boxed{4}$ **ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ** $u = Q(t)\, J_2(\mu_{21} r)\cos 2\varphi + v + w \Longrightarrow$

$$Q'' + 4\mu_{21}^2 Q = 0\ ,\ Q(0) = 0\ ,\ Q'(0) = 1 \Longrightarrow Q(t) = \frac{1}{2\mu_{21}}\sin 2\mu_{21} t\ ;$$

$$v_{tt} = 4\,\Delta\, v + \frac{f(r)}{2} + 2f(r)\sin\varphi - \frac{f(r)\cos 2\varphi}{2}\ ,\ v|_{t=0} = 0\ ,\ v_t|_{t=0} = 0\ ;$$

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} T_{0j}(t)\, J_0(\mu_{0j} r) + \sum_{j=1}^{\infty} T_{1j}(t)\, J_1(\mu_{1j} r)\sin\varphi + \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(t)\, J_2(\mu_{2j} r)\cos 2\varphi\ ;$$

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j}\, J_0(\mu_{0j} r)\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\, J_1(\mu_{1j} r)\ ,\ f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j}\, J_2(\mu_{2j} r) \Longrightarrow$$

$$T''_{0j} + 4\mu_{0j}^2\, T_{0j} = \frac{a_{0j}}{2}\ ,\ T_{0j}(0) = 0\ ,\ T'_{0j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{0j}(t) = \frac{a_{0j}}{8\,\mu_{0j}^2}\,(1 - \cos 2\mu_{0j} t)\ ;$$

$$T''_{1j} + 4\mu_{0j}^2\, T_{1j} = 2a_{2j}\ ,\ T_{1j}(0) = 0\ ,\ T'_{1j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{1j}(t) = \frac{a_{1j}}{2\,\mu_{1j}^2}\,(1 - \cos 2\mu_{1j} t)\ ;$$

$$T''_{2j} + 4\mu_{2j}^2\, T_{2j} = -\frac{a_{2j}}{2}\ ,\ T_{2j}(0) = 0\ ,\ T'_{2j}(0) = 0 \Longrightarrow T_{2j}(t) = \frac{a_{2j}}{8\,\mu_{2j}^2}\,(\cos 2\mu_{2j} t - 1)\ ,$$

$$w_{tt} = 4\,\Delta w\ ,\ w|_{t=0} = f(r)\ ,\ w_t|_{t=0} = 0\ ;$$

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} R_{0j}(t)\, J_0(\mu_{0j} r) \Longrightarrow$$

$$R''_{0j} + 4\mu_{0j}^2\, R_{0j} = 0\ ,\ R_{0j}(0) = a_{0j}\ ,\ R'_{0j}(0) = 0 \Longrightarrow R_{0j}(t) = a_{0j}\cos 2\mu_{0j} t\ ;$$

$$a_{0j} = \frac{\int\limits_0^1 f(r)\, J_0(\mu_{0j} r)\, r\, dr}{\int\limits_0^1 J_0^2(\mu_{0j} r)\, r\, dr}\ ,\ a_{1j} = \frac{\int\limits_0^1 f(r)\, J_1(\mu_{1j} r)\, r\, dr}{\int\limits_0^1 J_0^2(\mu_{1j} r)\, r\, dr}\ ,\ a_{2j} = \frac{\int\limits_0^1 f(r)\, J_2(\mu_{2j} r)\, r\, dr}{\int\limits_0^1 J_2^2(\mu_{2j} r)\, r\, dr}\ .$$

Ответ: $u(r,\varphi,t) = \left[\frac{\sin 2\mu_{21} t}{2\mu_{21}} + \frac{a_{21}}{8\mu_{21}^2}\,(\cos 2\mu_{21} t - 1)\right] J_2(\mu_{21} r)\cos 2\varphi + \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{a_{2j}}{8\mu_{2j}^2}\,(\cos 2\mu_{2j} t - 1)\, J_2(\mu_{2j} r)\cos 2\varphi +$
$+ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{1j}}{2\mu_{1j}^2}\,(1 - \cos 2\mu_{1j} t)\, J_1(\mu_{1j} r)\sin\varphi + \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{0j}\left(\cos 2\mu_{0j} t + \frac{1 - \cos 2\mu_{0j} t}{8\mu_{0j}^2}\right) J_0(\mu_{0j} r)$

ИНСТРУКЦИЯ

Время = 4 часа

по проверке экзаменационной работы по УМФ 2007/2008 уч. г.

1. $\boxed{6}$	Уравнение приведено к каноническому виду	1 очко
	Найдено общее решение	+1 очко
	Решены функциональные уравнения	+4 очка
2. $\boxed{5}$	Найдено решение при $x > at \geq 0$	1 очко
	Найдено решение при $0 \leq x < at$	+2 очка
	Учтено необходимое условие на разделяющей характеристике	+1 очко
	Проверена непрерывность вторых производных	+1 очко
3. $\boxed{8}$	Задача сведена к случаю однородных краевых условий	1 очко
	Найдены собственные функции и спектр	+1 очко
	Вычислены коэффициенты Фурье	+1 очко
	Поставлены задачи Коши для $T_k(t)$	+3 очка
	(по 1 очку для первых двух индексов k и 1 очко за общий случай)	
4. $\boxed{4}$	Найдено частное решение неоднородного уравнения	1 очко
	Выписаны линейные системы для определения коэффициентов	+2 очка
	Варианты 2,4: Отсутствует константа	снять не менее 1 очка
5. $\boxed{6}$	Найдено частное решение неоднородного уравнения	3 очка
	Найдено решение однородного уравнения	+3 очка
6. $\boxed{6}$	Выписана линейная система для неизвестных постоянных	1 очко
	Найдены характеристическое число λ_0 и собственная функция	+2 очка
	Найдено значение параметра α	+1 очко
	Построены решения для найденного α	+2 очка
	(по 1 очку для $\lambda \neq \lambda_0$ и $\lambda = \lambda_0$)	

ФОПФ

7. $\boxed{4}$	Поставлена краевая задача, на решении которой достигается inf	1 очко
	Решена краевая задача	+2 очка
	Вычислено значение inf	+1 очко

ФМБФ, ФПФЭ

7. $\boxed{4}$	Найдено обобщенное решение	2 очка
	Вычислена обобщенная производная	+1 очко
	Дан ответ на вопрос о регулярности обобщенных производных	+1 очко

ФРТК, ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ

7. $\boxed{4}$	Искомое решение правильно разложено по собственным функциям	1 очко
	Поставлены все задачи Коши	+1 очко
	Решены все задачи Коши	+2 очка

Общая сумма — 39 очков

Ответственный за контрольную работу — В.И.Жук