ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ______________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \\ u|_{y=1} = 3x, \quad u_y|_{y=1} = -x, \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(2; \dfrac{5}{4}\right)$, если условие $u|_{y=1} = 3x$ изменить на интервале $3 < x < 4$ с сохранением гладкости на $1 < x < 4$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$4u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2e^{2x} - 2x, \quad u_t|_{t=0} = -1;$$
$$u_x|_{x=0} = 2e^t - 2t.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \pi x \cos t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 9r, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u|_{r=1/2} = -\frac{7}{8} + 2\cos^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = 3 + \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/3} (\cos 3x \cos 6y - 2\sin 3x \sin 6y)\varphi(y)\,dy - 3\cos 9x + 2\sin 9x.$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши $\quad u_{tt} = \Delta u + 2\sin(x+y+z)\sin t,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = y^3 + z.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_t = 2\Delta u + J_1(2\mu_5^{(1)} r)\cos\varphi\cos t, \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = f(r)(4\cos\varphi - 3), \quad u|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1/2]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 91

8. ④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = -\frac{1}{6}\begin{cases} (x+5)(y-1), & x \leqslant y, \\ (x-1)(y+5), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

---

9. ④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1 + x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{8\pi}{15} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов			Оценка	
Фамилия проверяющего			Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} 2yu_{xx} + u_{xy} + 2yu_x + u_y = 0, \\ u|_{x=y^2} = \sin y, \quad -1 < y < 1, \\ u|_{y=0} = 0, \quad -\dfrac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, если условие $u|_{y=0} = 0$ изменить на интервале $0 < x < 1$ с сохранением гладкости на $-\frac{1}{2} < x < 1$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = -4;$$
$$u_x|_{x=0} = 2t - \operatorname{sh} 2t.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 25\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin 5t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = \cos 5x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 8r\sin\varphi, \quad r < 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u_r|_{r=1} = 3\sin\varphi + \cos 3\varphi - 2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda\int_0^{\pi/3} \sin(3x - 6y)\varphi(y)\,dy + 15\cos 9x.$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_t = 2\Delta u + (x^2 + 4y^2 - 5z^2)e^t,$$
$$u|_{t=0} = xy^2.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \Delta u + J_2(\mu_4^{(2)}r)\cos 2\varphi\cos(\mu_4^{(2)}t), \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_2(\mu_4^{(2)}r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на [0,1] функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 92

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{5}\begin{cases} (x+1)(4-y), & x \leqslant y, \\ (4-x)(y+1), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, имеет место неравенство

$$\frac{4\pi}{45} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Уравнения математической физики

Курс 3 Семестр 6 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** __________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} 2x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + y^2u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0, \\ u|_{y=1} = x, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(2; \dfrac{5}{4}\right)$, если условие $u|_{y=1} = x$ изменить на интервале $2 < x < 4$ с сохранением гладкости на $1 < x < 4$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$$9u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 6x, \quad u_t|_{t=0} = 4e^{-3x} + 2; \quad u_x|_{x=0} = -6t + 6e^{-t}.$$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + \pi\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \cos 2x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$$\Delta u = 8r\cos\varphi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$

$$u_r|_{r=1} = 2\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 8\cos\varphi + 2\sin^2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda\int_0^{\pi/4}(4\cos x\cos 3y + \sin x\sin 3y)\varphi(y)\,dy - \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_{tt} = 3\Delta u + 2(x^3y - xy^3),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = yze^x.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_t = 4\Delta u + J_2(\mu_3^{(2)}r)\sin 2\varphi\sin 2t, \quad r < 1, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$

$$u|_{t=0} = f(r)(3\sin 2\varphi - 4), \quad u|_{r=1} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 93

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{7}\begin{cases}(x+6)(1-y), & x \leqslant y,\\ (1-x)(y+6), & x \geqslant y\end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u|_{|x|=1} = x_1x_2 + x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{2\pi}{15} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Уравнения математической физики}}$

Курс $\boxed{3}$ Семестр $\boxed{6}$ 2008/2009 уч.г.

Фамилия студента ______________________________ **№ группы** ________

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.⑥ Решить задачу

$$\begin{cases} xu_{xy} - yu_{yy} + (x-1)u_y = 0, \\ u|_{x=1} = 1 + y, \quad \dfrac{1}{2} < y < 2, \\ u|_{y=1/x} = 2e^{1-x}, \quad \dfrac{1}{2} < x < 2. \end{cases}$$

Указать наибольшую область, в которой задача имеет единственное решение. Изменится ли решение в точке $\left(\dfrac{3}{2};1\right)$, если условие $u|_{x=1} = 1+y$ изменить на интервале $\dfrac{1}{2} < y < 1$ с сохранением гладкости на $\dfrac{1}{2} < y < 2$? Ответ обосновать.

2.④ Решить смешанную задачу

$u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \qquad u|_{t=0} = 2x, \quad u_t|_{t=0} = 12x; \quad u_x|_{x=0} = 2\sin 3t + 6t + 2.$

3.⑥ Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 9\pi x \sin 6t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4};$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/4} = 0, \quad t > 0.$$

4.③ Решить краевую задачу

$\Delta u = 10r\cos\varphi\sin\varphi, \quad r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$

$$u|_{r=2} = 1 + 8\sin 2\varphi - \sin 3\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

5.⑤ Решить при всех допустимых значениях λ уравнение

$$\varphi(x) = 2\lambda \int_0^{\pi/8} (4\sin 6x\cos 2y - 3\cos 6x \sin 2y)\varphi(y)\,dy + (\pi - 6)\cos 2x + 2(\pi+1)\sin 2x.$$

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

6.④ Решить задачу Коши

$$u_t = 4\Delta u + e^{x+z+4t},$$
$$u|_{t=0} = x^3\cos y.$$

7.④ Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \Delta u + J_1(2\mu_4^{(1)}r)\sin\varphi\sin(2\mu_4^{(1)}t), \quad r < \frac{1}{2}, \quad t > 0, \quad u = u(r,\varphi,t);$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(r)\cos 2\varphi, \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad |u|_{r=0}| < \infty,$$

где $f(r)$ — гладкая на $[0,1/2]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

8.④ Для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где

$$\mathcal{K}(x,y) = \frac{1}{4}\begin{cases} (x+2)(2-y), & x \leqslant y, \\ (2-x)(y+2), & x \geqslant y \end{cases}$$

а) поставить эквивалентную задачу Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_x\varphi = \lambda\varphi$, то есть найти соответствующий дифференциальный оператор $\mathcal{L}_x$ и соответствующие краевые условия;

б) вычислить в $D'(\mathbb{R}^2)$ производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{K}(x,y)$;

в) доказать, что в пространстве $D'(\mathbb{R}^2)$ имеет место соотношение $\mathcal{L}_x\mathcal{K}(x,y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x-y)$ — простой слой на прямой $y = x$.

9.④ Доказать, что для всех функций $u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию $u\big|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, имеет место неравенство

$$\frac{14\pi}{15} + \int\limits_{|x|<1} u\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{|x|<1} |\nabla u|^2 dx.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 94

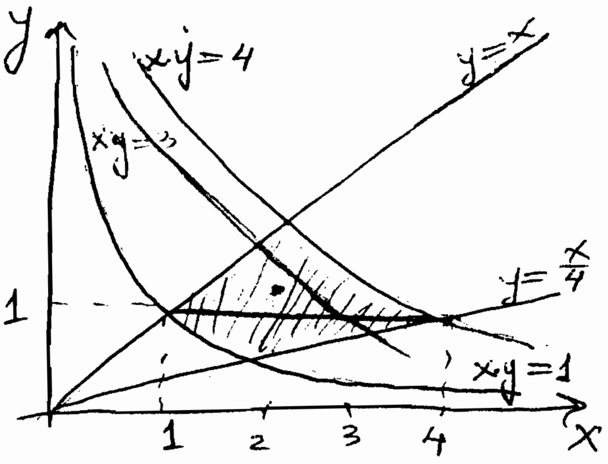
Ответы (вариант 91).

N1. Замена $\begin{cases} \xi = x\cdot y \\ \eta = \dfrac{x}{y} \end{cases}$,

$4\xi\eta \cdot V_{\xi\eta} = 0$,

$u(x,y) = x\cdot y + \dfrac{2x}{y}$,

область: $\begin{cases} 1 < xy < 4 \\ 1 < \dfrac{x}{y} < 4, \\ x>0 \end{cases}$ Ответ не изменится в т. $(2; \frac{5}{4})$



N2. $u(x,t) = \begin{cases} 2\cdot e^{2x}\cdot \operatorname{ch} t - 2x - t, & x \geq \frac{t}{2}, \\ \frac{1}{2}(2x-t)^2 - 2t + 1 + e^{2x+t}, & x < \frac{t}{2}. \end{cases}$

N3. $\lambda_n = 1 + 2n$, $n \geq 0$; $X_n(x) = \sin \lambda_n x$, $n \geq 0$; $T_0(t) = \sin t + 2t\sin t$,

$\underset{n\neq 0}{T_n(t)} = \dfrac{\pi \cdot a_n}{1-\lambda_n^2}(\cos\lambda_n t - \cos t)$, $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sin \lambda_n x$, $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{\pi(1+2n)^2}$, $n \geq 0$

$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} T_n(t)\cdot X_n(x)$

N4. $u(r,\varphi) = r^3 + \left(\frac{4}{5}r - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{r}\right)\sin\varphi + \frac{4}{17}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\cdot\cos 2\varphi$

N5. $\begin{cases} a_1 - \frac{8}{9}\lambda\cdot a_2 = \frac{4}{5} \\ \frac{8}{9}\lambda\cdot a_1 - a_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $\lambda \neq \pm\frac{9}{8}$: $\varphi(x) = 2\lambda\cos 3x \dfrac{4}{9-8\lambda} - \dfrac{16}{5}\lambda \dfrac{\sin 3x}{1-\frac{8}{9}\lambda} - 3\cos 9x + 2\sin 9x$;

$\lambda = -\frac{9}{8}$: $\varphi(x) = -\frac{9}{4}a_1\cos 3x + \frac{9}{2}\left(\frac{4}{5} - a_1\right)\sin 3x - 3\cos 9x + 2\sin 9x$.

собств. ф. $\varphi(x) = \cos 3x + 2\sin 3x$;

$\lambda = \frac{9}{8}$: $\varnothing$, собств. φ: $\varphi(x) = \cos 3x - 2\sin 3x$

N6. $u(x,y,z,t) = \sin(x+y+z)\cdot\left(\sin t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right) + y^3t + yt^3 + zt.$

N7. $u(r,\varphi,t) = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 5}}^{+\infty} 4a_j^{(1)} e^{-8(\mu_j^{(1)})^2 t}\cdot J_1(2\mu_j^{(1)}\cdot r)\cos\varphi - \sum\limits_{j=1}^{+\infty} 3a_j^{(0)} e^{-8(\mu_j^{(0)})^2 t}\cdot J_0(2\mu_j^{(0)} r)$

$+ \dfrac{8(\mu_5^{(1)})^2\left(\cos t - e^{-8(\mu_5^{(1)})^2 t}\right) + \sin t}{64\cdot(\mu_5^{(1)})^4 + 1}\cdot J_1(2\mu_5^{(1)} r)\cdot\cos\varphi$, где

$a_j^{(1)} = \dfrac{\int_0^{1/2} f(r)\cdot J_1(2\mu_j^{(1)}\cdot r)\, r\,dr}{\int_0^{1/2} J_1^2(2\mu_j^{(1)}\cdot r)\cdot r\,dr}$, $a_j^{(0)} = \dfrac{\int_0^{1/2} f(r)\cdot J_0(2\mu_j^{(0)}\cdot r)\cdot r\,dr}{\int_0^{1/2} J_0^2(2\mu_j^{(0)}\cdot r)\cdot r\,dr}.$

N8. а) $L_x\varphi = -\varphi'' = \lambda\varphi$, $\varphi(0) - 5\cdot\varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$,

б) $\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,y) = \dfrac{1-y}{6} - \theta(x-y)$; в) $L_x(K(x,y)) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}K(x,y) = \delta(x-y)$

N9. $\begin{cases} \Delta u = -1 \\ u|_{|x|=1} = x_1 + x_3^2 \end{cases}$, $r<1$: $\hat{u} = \frac{1}{2} + x_1 + x_3^2 - \frac{r^2}{2}$, $\nabla\hat{u} = (1 - x_1, -x_2, x_3)$

$\frac{1}{2}\int\limits_{r<1}|\nabla\hat{u}|^2 dx - \int\limits_{r<1}\hat{u}\,dx = \frac{8\pi}{15}$

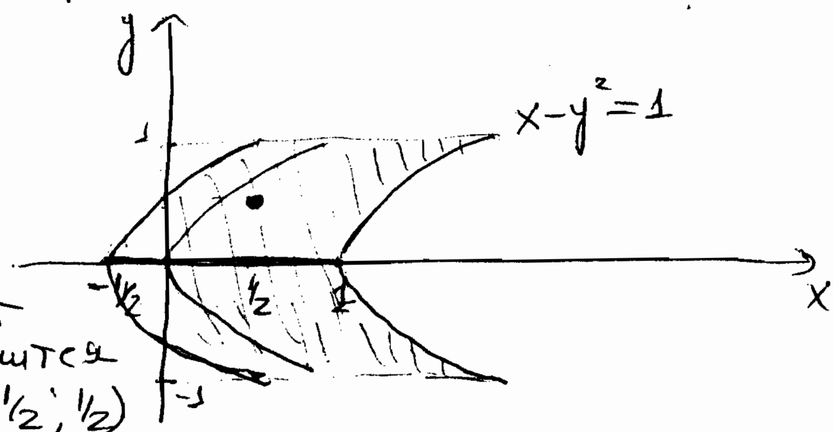
Ответы (вариант 92).

N1. Замена $\begin{cases} \xi = x - y^2 \\ \eta = y \end{cases}$,

$V_{\xi\eta} + V_\eta = 0$,

$u(x,y) = \sin y \cdot e^{y^2 - x}$.

область $\begin{cases} -1/2 < x - y^2 < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases}$, ответ изменится в т. $(1/2; 1/2)$



N2. $u(x,t) = \begin{cases} x^2 + 4t^2 - 4t, & x \geq 2t, \\ ch(x-2t) + \frac{(x+2t)^2}{2} - 4t - 1, & x < 2t. \end{cases}$

N3. $\lambda_n = (1+2n),\ n \geq 0$, $X_n(x) = \cos \lambda_n x$, $x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos \lambda_n x$, $a_n = -\frac{4}{\pi(1+2n)^2}$

$T_n(t) = \frac{25\pi \cdot a_n}{\lambda_n^2 - 25} \cdot \left(\sin 5t - \frac{5}{\lambda_n} \cdot \sin \lambda_n t\right)$, $n \neq 2$, $T_2(t) = \cos 5t - \frac{2}{25}\sin 5t + \frac{2}{5} t \cdot \cos 5t$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t) X_n(x)$

N4. $u(r,\varphi) = r^3 \cdot \sin\varphi - r^2 \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos 3\varphi$

N5. $\begin{cases} a_1\left(1 + \frac{4}{9}\lambda\right) = 0 \\ a_2\left(1 + \frac{8}{9}\lambda\right) = -4 \end{cases}$, $\lambda \neq -\frac{9}{4}; -\frac{9}{8}$: $\varphi(x) = \frac{8\lambda}{1 + \frac{8}{9}\lambda} \cdot \cos 3x + 15\cos 9x$,

$\lambda = -\frac{9}{4}$, $\varphi(x) = -\frac{9}{2} a_1 \sin 3x + 18\cos 3x + 15\cos 9x$

собств. ф. $\varphi(x) = \sin 3x$

$\lambda = -\frac{9}{8}$; $\varnothing$: собств. ф. $\varphi(x) = \cos 3x$

N6. $u(x,y,z,t) = (x^2 + 4y^2 - 5z^2)(e^t - 1) + xy^2 + 4tx$.

N7. $u(r,\varphi,t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{(1)} \cos(\mu_j^{(1)} t) \cdot J_1(\mu_j^{(1)} \cdot r) \sin\varphi + \frac{2+t}{2\mu_4^{(2)}} \sin(\mu_4^{(2)} t) \cdot J_2(\mu_4^{(2)} \cdot r) \cos 2\varphi$

где $a_j^{(1)} = \frac{\int_0^1 f(r) \cdot J_1(\mu_j^{(1)} \cdot r)\, r\, dr}{\int_0^1 J_1^2(\mu_j^{(1)} \cdot r) \cdot r\, dr}$

N8. а) $L_x\varphi = -\varphi'' = \lambda\varphi$, $\varphi(0) - \varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) + 3\varphi'(1) = 0$;

б) $\frac{\partial}{\partial x} K(x,y) = \frac{4-y}{5} - \theta(x-y)$; в) $L_x[K(x,y)] = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) = \delta(x-y)$

N9. $\begin{cases} \Delta u = -1, & r < 1 \\ u\big|_{|x|=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3 \end{cases}$, $\hat{u} = \frac{5}{6} - x_3 - x_3^2 + \frac{r^2}{6}$,

$\nabla \hat{u} = \left(\frac{x_1}{3}; \frac{x_2}{3}; -1 - \frac{5}{3}x_3\right)$

$\frac{1}{2}\int_{r<1} |\nabla \hat{u}|^2 dx - \int_{r<1} \hat{u}\, dx = \frac{4\pi}{45}$.

Ответы (вариант 93).

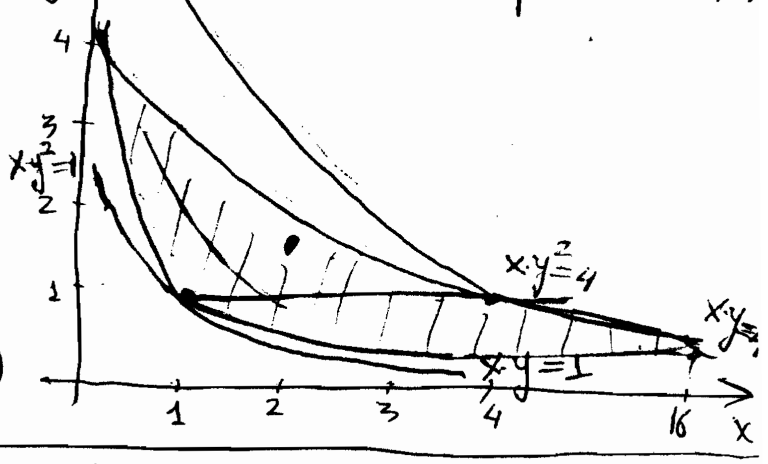
N1. Замена $\begin{cases} \xi = x \cdot y \\ \eta = x \cdot y^2 \end{cases}$,

$\xi \cdot \eta \cdot V_{\xi\eta} = 0$,

$u(x,y) = 2xy - xy^2$,

область $\begin{cases} 1 < xy < 4 \\ 1 < xy^2 < 4 \end{cases}$

ответ изменится в точке $\left(2; \frac{5}{4}\right)$



N2. $u(x,t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{-3x} \cdot \operatorname{sh} t + 6x + 2t, & x \geq \frac{t}{3} \\ (3x-t)^2 + 4t + 2 - 2 \cdot e^{-3x-t}, & x < \frac{t}{3}. \end{cases}$

N3. $\lambda_n = 2 + 4n,\ n \geq 0,\ X_n(x) = \cos \lambda_n x,\ x - \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos \lambda_n x,\ a_n = -\frac{8}{\pi \cdot \lambda_n^2}$

$\underset{n \neq 0}{T_n(t)} = \frac{\pi \cdot a_n}{\lambda_n^2 - 4}(\cos 2t - \cos \lambda_n t),\ T_0(t) = \cos 2t - \frac{1}{2} t \sin 2t,$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t) X_n(x)$

N4. $u(r,\varphi) = r^3 \cdot \cos\varphi + 1 + \left(-\frac{1}{5} r + \frac{4}{5}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi - \frac{4}{17}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi$

N5. $\begin{cases} a_1(1-2\lambda) = 0 \\ 4\lambda \cdot a_1 + a_2\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$; $\lambda \neq \frac{1}{2}; 2$: $\varphi(x) = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\lambda - 2} \cdot \sin x - \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$,

$\lambda = \frac{1}{2}$: $\varphi(x) = 4a_1 \cdot \cos x + \sin x\left(\frac{8}{3}a_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) - \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

собств. ф. $\varphi(x) = \cos x + \frac{2}{3}\sin x$

$\lambda = 2$: $\varnothing$; собств. ф. $\varphi(x) = \sin x$

N6. $u(x,y,z,t) = t^2(x^3 y - xy^3) + y \cdot z \cdot e^x \cdot \frac{\operatorname{sh}\sqrt{3}t}{\sqrt{3}}$.

N7. $u(r,\varphi,t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{+\infty} 3 \cdot a_j^{(2)} \cdot e^{-4(\mu_j^{(2)})^2 t} J_2\left(\mu_j^{(2)} r\right) \cdot \sin 2\varphi -$

$- \sum_{j=1}^{+\infty} 4 \cdot a_j^{(0)} e^{-4(\mu_j^{(0)})^2 t} \cdot J_0\left(\mu_j^{(0)} \cdot r\right) + \frac{2(\mu_3^{(2)})^2 \cdot \sin 2t - \cos 2t + e^{-4(\mu_3^{(2)})^2 t}}{2\left(4(\mu_3^{(2)})^2 + 1\right)} J_2\left(\mu_3^{(2)} r\right)\sin 2\varphi$

где $a_j^{(0)} = \frac{\int_0^1 f(r) \cdot J_0(\mu_j^{(0)} \cdot r) \cdot r\,dr}{\int_0^1 J_0^2(\mu_j^{(0)} \cdot r)\, r\,dr}$, $a_j^{(2)} = \frac{\int_0^1 f(r) \cdot J_2(\mu_j^{(2)} r) \cdot r\,dr}{\int_0^1 J_2^2(\mu_j^{(2)} \cdot r) \cdot r\,dr}$.

N8. а) $L_x(\varphi) = -\varphi'' = \lambda\varphi$; $\varphi(0) - 6 \cdot \varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$;

б) $\frac{\partial}{\partial x} K(x,y) = \frac{1-y}{7} - \theta(x-y)$; в) $L_x(K(x,y)) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,y) = \delta(x-y)$

N9. $\begin{cases} \Delta u = -1 \\ u|_{|x|=1} = x_1 \cdot x_2 + x_3^2 \end{cases}$, $r < 1$, $\hat{u} = x_1 \cdot x_2 + x_3^2 + \frac{1-r^2}{2}$

$\nabla \hat{u} = (x_2 - x_1, x_1 - x_2, x_3)$

$\frac{1}{2}\int_{|x|<1} |\nabla \hat{u}|^2 dx - \int_{|x|<1} \hat{u}\, dx = \frac{2\pi}{15}$.

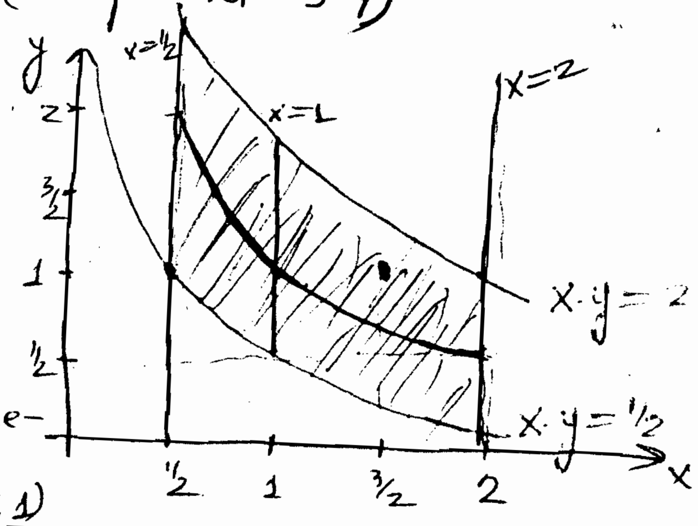
Ответы (вариант 94)

N1. Замена $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = xy \end{cases}$;

$V_{\xi\eta} + V_\eta = 0$.

$u(x,y) = e^{1-x}(1+xy)$,

область $\begin{cases} \frac{1}{2} < x < 2 \\ \frac{1}{2} < xy < 2 \end{cases}$, ответ не изменится в т. $(\frac{3}{2}; 1)$



N2. $u(x,t) = \begin{cases} 2x + 12xt, & x \geqslant 3t, \\ 2\cdot\cos(x-3t) + 2x + (x+3t)^2 - 2, & x < 3t. \end{cases}$

N3. $\lambda_n = 2 + 4n,\ n \geqslant 0,\ X_n(x) = \sin\lambda_n x,\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin\lambda_n x,\ a_n = \frac{(-1)^n}{\pi\lambda_n^2}$

$T_n(t) = \frac{9\pi\cdot a_n}{\lambda_n^2 - 36}\left(\sin 6t - \frac{6}{\lambda_n}\sin\lambda_n t\right)$, $n \neq 1$; $T_1(t) = \frac{5}{36}\sin 6t + \frac{1}{6}t\cdot\cos 6t$

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, X_n(t)$

N4. $u(r,\varphi) = r^3\cdot\sin 2\varphi + 1 - \frac{1}{8}r^3\cdot\sin 3\varphi.$

N5. $\begin{cases} 2a_1(1-2\lambda) + \frac{3}{2}\lambda\cdot a_2 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \\ -\lambda\cdot a_1 + a_2 = \frac{\pi^2}{8} - 1 \end{cases}$; $\lambda \neq 2; \frac{2}{3}$: $\varphi(x) = \frac{(\pi^2-8)\lambda}{2-\lambda}\cdot\sin 6x - \frac{(\frac{3\pi^2}{2}-12)\lambda}{2-\lambda}\cdot\cos 6x + (\pi-6)\cos 2x + 2(\pi+1)\sin$

$\lambda = \frac{2}{3}$: $\varphi(x) = \frac{16}{3}a_1\sin 6x - 4\left(\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right) + \frac{2}{3}a_1\right)\cdot\cos 6x + (\pi-6)\cos 2x + 2(\pi+1)\sin 2x$

собств. ф. $\varphi(x) = 2\sin 6x - \cos 6x$

$\lambda = 2$: $\varnothing$; собств. ф. $\varphi(x) = 2\sin 6x - 3\cos 6x$

N6. $u(x,y,z,t) = -\frac{1}{4}e^{x+z+4t} + \frac{1}{4}e^{x+z+8t} + (x^3 + 24tx)\cdot\cos y\cdot e^{-}$

N7. $u(r,\varphi,t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 4}}^{+\infty} \frac{a_j^{(2)}}{2\mu_j^{(2)}}\sin(2\cdot\mu_j^{(2)}t)\cdot J_2(2\mu_j^{(2)}\cdot r)\cdot\cos 2\varphi +$

$+ \frac{1}{4\mu_4^{(1)}}\left[\frac{1}{2\mu_4^{(1)}}\sin(2\mu_4^{(1)}t) - t\cdot\cos(2\mu_4^{(1)}t)\right]\cdot J_1(2\mu_4^{(1)}\cdot r)\cdot\sin\varphi,$

где $a_{2j} = \dfrac{\int_0^{1/2} f(r)\cdot J_2(2\mu_j^{(2)}\cdot r)\cdot r\,dr}{\int_0^{1/2} J_2^2(2\mu_j^{(2)}\cdot r)\cdot r\,dr}$

N8. а) $L_x\varphi = -\varphi'' = \lambda\varphi,\ \varphi(0) - 2\varphi'(0) = 0,\ \varphi(1) + \varphi'(1) = 0$

б) $\frac{\partial}{\partial x}(K(x,y)) = \frac{2-y}{4} - \theta(x-y)$; в) $L_x(K(x,y)) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K(x,y)) = \delta(x-$

N9. $\begin{cases} \Delta u = -1, & r<1 \\ u|_{r=1} = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \end{cases}$, $\hat{u} = \frac{1}{2} - 2x_3^2 + \frac{r^2}{2}$, $\nabla\hat{u} = (x_1, x_2, -3$

$\frac{1}{2}\int_{r<1}|\nabla\hat{u}|^2dx - \int_{r<1}\hat{u}\,dx = \frac{14\pi}{15}.$