Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2006/2007 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -\dfrac{5}{2}$:

$$f(z) = \frac{i}{iz^2 + 5z - 6i} - \frac{z(1+i)}{z^2 + 2(1-i)z - 4i}.$$

2.⑤ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{e^{\operatorname{tg}(z)} \operatorname{ctg}(z)}{\operatorname{ctg}(2z)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin\frac{1}{z}}{1 - \cos\frac{1}{z}}\, dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\cos(7-6x)}{x^2 + 2x + 5}\, dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{z^2+1}\}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \geqslant 0\},$$
$$\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = \frac{3\pi}{4}\right\},$$

причем $g(0) = 1$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z-5-5i|=6} \frac{dz}{g(z)^2 - 2g(z) - 8}.$$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 51

1 семестр 2006/2007 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 5$:

$$f(z) = \frac{i-2-iz}{z^2+(i-2)z-2i} + \frac{4i-3-iz}{iz^2+2z+3i}.$$

2.⑤ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{(\pi z - 1)^2 e^{\frac{1}{z^3}}}{\left(1+\cos\frac{1}{z}\right)^2}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{z}}{i-\operatorname{sh}\frac{1}{z}}\,dz.$$

4.④

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+7)\sin(5-3x)}{x^2+2x+2}\,dx.$$

5.⑥

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}{x^2}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\operatorname{Ln}\frac{z^2+1}{26}\right\}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\},$$

$$\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-i) = \frac{\pi}{4}\right\},$$

причем $g(5) = 0$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z+5-5i|=6} \frac{dz}{g(z)^2 + \pi i g(z) + 2\pi^2}.$$

---

1 семестр 2006/2007 уч.г.

№ группы	Фамилия студента	Сумма баллов	Оценка	Подпись препод.

1.④ Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = \frac{5}{2}$:

$$f(z) = \frac{2z - 4i}{iz^2 + 4z - 4i} + \frac{z(i-1) - i}{z^2 - z(3+2i) + 6i}.$$

2.⑤ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z) e^{\operatorname{ctg}(z)}}{\operatorname{tg}(2z)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\cos\frac{1}{z}}{1+\sin\frac{1}{z}}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2+x)\cos(3-7x)}{x^2-4x+5}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{(x^2-x)^2}\sqrt{-\frac{x+1}{x+2}}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{1-7z^2}\}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{7}},\ \operatorname{Im} z \leqslant 0 \right\},$$

$$\gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \arg\left(z + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{3\pi}{4} \right\},$$

причем $g(0) = 1$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z+4+4i|=5} \frac{dz}{g(z)^2 - g(z) - 12}.$$

Семестровая контрольная работа по ТФКП
1 семестр 2006/2007 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = \dfrac{5i}{2}$:

$$f(z) = \frac{z(i-3)-4-6i}{z^2+6iz-8} + \frac{2z-4i-9}{z^2+z(4i-3)-12i}.$$

2.⑤ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{(2-\pi z)^3 e^{\frac{1}{z^2}}}{\left(1-\sin\frac{1}{z}\right)^3}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.⑤
$$\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z^2\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}}{1+\operatorname{ch}\frac{1}{z}}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-6)\sin(2-5x)}{x^2-4x+8}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}{x^2+4x+4}\,dx.$$

6.⑥ Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\left\{\operatorname{Ln}\dfrac{z^2-1}{17}\right\}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\},$$
$$\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z-1) = \frac{\pi}{4}\right\},$$

причем $g(4i) = -\pi i$. Вычислить

$$\oint\limits_{|z-5+5i|=6} \frac{dz}{g(z)^2 - \pi i g(z) + 2\pi^2}.$$

Ответы.

Вариант 1.

1. Ответ:

(4)

$$f(z) = -\frac{i}{z-3i} - \frac{1}{z+2} =$$

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(3i)^n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}},\ 2 < |z| < 3.$$

2. Ответ:

(5)

$z = \pi n$ - УОТ
$z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ - СОТ
$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ – полюса первого порядка,
$n \in \mathbb{Z}$
$z = \infty$ – неизолированная особая точка.

3. Ответ:

(5)

$$I = -2\pi i \mathrm{res}_{\infty} f = -\frac{\pi i}{3}.$$

$$\frac{\sin\frac{1}{z}}{1-\cos\frac{1}{z}} = 2z - \frac{1}{6}z + o(\frac{1}{z^2}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_{\infty} f = \frac{1}{6}.$$

4. Ответ:

(4)

$$I = \pi e^{-12}[-2\cos 13 + \sin 13].$$

$$I = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x - 3e^{i(6x-7)}}{x^2+2x+5}dx\right) =$$

$$Re(2\pi i \mathrm{res}_{-1+2i} f) = Re(\pi e^{-12}(-2+i)(\cos 13 - i\sin 13)).$$

5. Ответ: $I = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$.

(6)

$$2I = 2\pi i(\mathrm{res}_i f + \mathrm{res}_{-i} f + \mathrm{res}_{\infty} f),$$

$$\mathrm{res}_i f = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}i} + 2e^{\frac{5\pi}{4}i}}{(2i)^3},$$

$$\mathrm{res}_{-i} f = \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i} + 2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{(2i)^3},$$

$$\mathrm{res}_{\infty} f = 0.$$

6. Ответ: $I = -\frac{2\pi}{3}$.

(6)

1. $f(z) = \frac{1}{g(z)^2 - 2g(z) - 8} = \frac{1}{(g(z)-4)(g(z)+2)}$. Отсюда кандидаты в особые точки $f(z)$ находятся из уравнений $g(z)^3 = z^2 + 1 = -8, g(z)^3 = z^2 + 1 = 64$. Кандидаты: $z = \pm 3i$, $z = \pm 3\sqrt{7}$.

2. Внутри контура лежат только $z = 3i$ и $z = 3\sqrt{7}$. (Контур не пересекает разрез, т. к. $|5 + 5i| > 6 + 1$.)

3. $g(3i) = g(0)\sqrt[3]{\frac{8}{1}}\,e^{\frac{i}{3}(\Delta\, arg(z-i) + \Delta\, arg(z+i))} = 2e^{\frac{i}{3}(\pi+2\pi)} = -2.$ — особая точка.

$g(3\sqrt{7}) = g(0)\sqrt[3]{\frac{64}{1}}\,e^{\frac{i}{3}(\Delta\, arg(z-i) + \Delta\, arg(z+i))} = 4e^{\frac{i}{3}(\varphi + (2\pi - \varphi))} = 4e^{\frac{2\pi i}{3}}.$ — неособая точка.

4. $g'(z) = \frac{(z^2+1)'}{3(g(z))^2} \Rightarrow g'(3i) = \frac{6i}{3\cdot 4} = \frac{i}{2}$. У $f(z) = \frac{1}{(g(z)-4)(g(z)+2)} = \frac{1}{h(z)}$ точка $z = 3i$ — полюс 1 порядка. Вычет равен $\frac{1}{h'(3i)} = \frac{1}{g'(3i)((g(3i)-4)+(g(3i)+2))} = \frac{1}{i/2\cdot((-2-4)+0)} = \frac{1}{-3i}$. Отсюда $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3i} = -\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 2.

1. Ответ:

(4)

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} - \frac{i}{z-3i} =$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n\Big(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}i^n}\Big),\ 3 < |z| < +\infty.$$

2. Ответ:

(5)

$z = \frac{1}{\pi}$, $z = \infty$ – полюса второго порядка
$z = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$, $n \neq 0$ – полюса четвертого порядка
$z = 0$ – неизолированная особая точка.

3. Ответ:

(5)

$$I = -2\pi i(\mathrm{res}_{-\frac{2i}{\pi}} f + \mathrm{res}_\infty f) = - 2\pi i.$$
$$\frac{\mathrm{ch}(\frac{1}{-\frac{2i}{\pi}+t})}{i - \mathrm{sh}(\frac{1}{-\frac{2i}{\pi}+t})} = \frac{i\frac{\pi^2}{4}t + o(t)}{-i\frac{\pi^4}{16}t^2 + o(t^2)},\ t \to 0,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_{-\frac{2i}{\pi}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$
$$\frac{\mathrm{ch}\,\frac{1}{z}}{i - \mathrm{sh}\,\frac{1}{z}} = -i - \frac{1}{z} + o(\frac{1}{z}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_\infty f = 1.$$

4. Ответ:

(4)

$$I = \pi e^{-3}[6\sin 8 - \cos 8].$$
$$I = -Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+7)e^{i(3x-5)}}{x^2+2x+2}dx\right) = -Im(2\pi i \mathrm{res}_{-1+i}\mathrm{f}) =$$
$$-Im(\pi e^{-3}(6+i)(\cos 8 - i\sin 8)).$$

5. Ответ: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1 - \frac{5}{3\cdot 2^{2/3}})$.

(6)

$$I - Ie^{-\frac{2\pi}{3}i} = 2\pi i(\mathrm{res}_0 f + \mathrm{res}_\infty f).$$
$$f(z) = -\frac{e^{-\frac{\pi i}{3}}}{z} + o(\frac{1}{z}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_\infty f = e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$
$$\mathrm{res}_0 f = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2 f(z) = \frac{5e^{\frac{2\pi i}{3}}}{3\sqrt[3]{4}}.$$

6. Ответ: $\frac{26}{15}$.

(6)

1. $f(z) = \frac{1}{g(z)^2 + \pi i g(z) + 2\pi^2} = \frac{1}{(g(z)-\pi i)(g(z)+2\pi i)}$. Отсюда кандидаты в особые точки $f(z)$ находятся из уравнений $e^{g(z)} = \frac{z^2+1}{26} = -1, e^{g(z)} = \frac{z^2+1}{26} = 1$. Кандидаты: $z = \pm 3\sqrt{3}i$, $z = \pm 5$.

2. Внутри контура лежат только $z = -5$ и $z = 3\sqrt{3}i$. (Контур не пересекает разрез, т. к. $|-5+5i| > 6 + 1$.)

3. $g(-5) = g(5) + \ln\frac{1}{1} + i(\Delta\, arg(z-i) + \Delta\, arg(z+i) = i((-2\varphi) - (2\pi - 2\varphi)) = -2\pi i$. — особая точка. $g(3\sqrt{3}i) = g(5) + \ln\frac{1}{1} + i(\Delta\, arg(z-i) + \Delta\, arg(z+i) = i(-(\varphi+\pi) - ((\pi-\varphi)+\pi)) = -3\pi i$. — неособая точка.

4. $g'(z) = \frac{2z}{z^2+1} \Rightarrow g'(-5) = -\frac{5}{13}$. У $f(z) = \frac{1}{(g(z)-\pi i)(g(z)+2\pi i)} = \frac{1}{h(z)}$ точка $z = -5$ — полюс 1 порядка. Вычет равен $\frac{1}{h'(-5)} = \frac{1}{g'(-5)((g(-5)-\pi i)+(g(-5)+2\pi i))} = -\frac{1}{5/13\cdot((-2\pi i - \pi i)+0)} = \frac{13}{15\pi i}$. Отсюда $I = 2\pi i \cdot \frac{13}{15\pi i} = \frac{26}{15}$.

Вариант 3.

1. Ответ:

(4)

$$f(z) = -\frac{1}{z-3} - \frac{i}{z-2i} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1} i^n},\ 2 < |z| < 3.$$

2. Ответ:

(5)

$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ - УОТ
$z = \pi n$ - СОТ
$z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ – полюса второго порядка,
$n \in \mathbb{Z}$
$z = \infty$ – неизолированная особая точка.

3. Ответ: $I = 2\pi i(\mathrm{res}_\infty f)) = \pi i.$

(7)

$$\frac{z\cos\frac{1}{z}}{1+\sin\frac{1}{z}} = z - 1 + \frac{1}{2z} + o(\frac{1}{z}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_\infty f = -\frac{1}{2}.$$

4. Ответ:

(4)

$$I = \pi e^{-7}[4\cos 11 - \sin 11].$$

$$I = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2+x)e^{i(7x-3)}}{x^2-4x+5}\right) =$$

$$Re(2\pi i \mathrm{res}_{2+i} f) = Re(\pi e^{-7}(4+i)(\cos 11 + i\sin 11))$$

5. Ответ: $I = \pi(\frac{9}{4\sqrt{2}} - \frac{23}{6\sqrt{6}}).$

(6)

$$2I = 2\pi i(\mathrm{res}_0 f + \mathrm{res}_1 f + \mathrm{res}_\infty f).$$

$$\mathrm{res}_0 f = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = -\frac{9i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{res}_1 f = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z) = \frac{23i}{6\sqrt{6}}.$$

$$\mathrm{res}_\infty f = 0.$$

6. Ответ: $-\frac{27\pi i}{98} i.$

(6)

1. $f(z) = \frac{1}{g(z)^2 - g(z) - 12} = \frac{1}{(g(z)-4)(g(z)+3)}$. Отсюда кандидаты в особые точки $f(z)$ находятся из уравнений $g(z)^3 = 1 - 7z^2 = -27, g(z)^3 = 1 - 7z^2 = 64$. Кандидаты: $z = \pm 2$, $z = \pm 3i$.

2. Внутри контура лежат только $z = -3i$ и $z = -2$. (Контур не пересекает разрез, т. к. $|4+4i| > 5 + \frac{1}{\sqrt{7}}$.)

3. $g(-3i) = g(0)\sqrt[3]{\frac{64}{1}}\, e^{\frac{i}{3}(\Delta\, arg(z+\frac{1}{\sqrt{7}}) + \Delta\, arg(z-\frac{1}{\sqrt{7}}))} = 2e^{\frac{i}{3}(-\varphi-(2\pi-\varphi))} = 4e^{\frac{-2\pi i}{3}}$. — неособая точка.

$g(-2) = g(0)\sqrt[3]{\frac{27}{1}}\, e^{\frac{i}{3}(\Delta\, arg(z+\frac{1}{\sqrt{7}}) + \Delta\, arg(z-\frac{1}{\sqrt{7}}))} = 3e^{\frac{i}{3}(-\pi-2\pi)} = -3$. — особая точка.

4. $g'(z) = \frac{(1-7z^2)'}{3(g(z))^2} \Rightarrow g'(-2) = \frac{-14\cdot(-2)}{3\cdot 9} = \frac{28}{27}$. У $f(z) = \frac{1}{(g(z)-4)(g(z)+3)} = \frac{1}{h(z)}$ точка $z = -2$ — полюс 1 порядка. Вычет равен $\frac{1}{h'(-2)} = \frac{1}{g'(-2)((g(-2)-4)+(g(-2)+3))} = \frac{1}{28/27\cdot((-3-4)+0)} = -\frac{27}{196}$. Отсюда $I = -2\pi i \cdot \frac{27}{196} = -\frac{27\pi i}{98}$.

Вариант 4.

1. Ответ:

(4)

$$f(z) = -\frac{1}{z+3} + \frac{i}{z+2i} =$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{n-1} i^n}{z^n},\ 2 < |z| < 3.$$

2. Ответ:

(5)

$z = \frac{2}{\pi}$, $z = \infty$ – полюса третьего порядка
$z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \neq 0$ – полюса шестого порядка
$z = 0$ – неизолированная особая точка.

3. Ответ:

(5)

$$I = -2\pi i(\mathrm{res}_{-\frac{i}{\pi}} f + \mathrm{res}_\infty f) = \cancel{2\pi i\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)} \quad -\frac{\pi i}{12}$$

$$\frac{\mathrm{sh}(\frac{1}{-\frac{i}{\pi}+t})}{1 + \mathrm{ch}\,\frac{1}{-\frac{i}{\pi}+t}} = \frac{-\pi^2 t + o(t)}{-\frac{\pi^4}{2}t^2 + o(t^2)},\ t \to 0,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_{-\frac{i}{\pi}} f = \frac{2}{\pi^2}.$$

$$\frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{z}}{1 + \mathrm{ch}\,\frac{1}{z}} = \frac{1}{2z} + o(\frac{1}{z}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_\infty f = -\frac{1}{2}.$$

4. Ответ:

(4)

$$I = \pi e^{-10}[-\cos 8 + 2\sin 8].$$

$$I = Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(6-x)e^{i(5x-2)}}{x^2 - 4x + 8} dx\right) = Im(2\pi i \mathrm{res}_{2+2i} f) =$$

$$Im(\pi e^{-10}(2-i)(\cos 8 + i\sin 8)).$$

5. Ответ: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(\frac{5}{3\sqrt[3]{3}} - 1)$.

(6)

$$I - Ie^{\frac{2\pi i}{3}} = 2\pi i(\mathrm{res}_{-2} f + \mathrm{res}_\infty f).$$

$$\mathrm{res}_{-2} f = \lim_{z \to -2} (z+2)^2 f(z) = -\frac{e^{\frac{\pi i}{3}} 5}{3\sqrt[3]{3}}.$$

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{z} + o(\frac{1}{z}),\ z \to \infty,\ \Rightarrow\ \mathrm{res}_\infty f = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

6. Ответ: $\frac{17}{9\sqrt{2}}$.

(6)

1. $f(z) = \frac{1}{g(z)^2 - \pi i g(z) + 2\pi^2} = \frac{1}{(g(z) - 2\pi i)(g(z) + \pi i)}$. Отсюда кандидаты в особые точки $f(z)$ находятся из уравнений $e^{g(z)} = \frac{z^2-1}{17} = 1, e^{g(z)} = \frac{z^2-1}{17} = -1$. Кандидаты: $z = \pm 3\sqrt{2}$, $z = \pm 4i$.

2. Внутри контура лежат только $z = -4i$ и $z = 3\sqrt{2}$. (Контур не пересекает разрез, т. к. $|5 - 5i| > 6 + 1$.)

3. $g(-4i) = g(4i) + \ln\frac{1}{1} + i(\Delta\, arg(z-1) + \Delta\, arg(z+1) = -\pi i + i((2\varphi) + (2\pi - 2\varphi)) = \pi i$. — неособая точка.

$g(3\sqrt{2}) = g(4i) + \ln\frac{1}{1} + i(\Delta\, arg(z-1) + \Delta\, arg(z+1) = -\pi i + i((\varphi + \pi) + ((\pi - \varphi) + \pi)) = 2\pi i$. — особая точка.

4. $g'(z) = \frac{2z}{z^2-1} \Rightarrow g'(3\sqrt{2}) = \frac{6\sqrt{2}}{17}$. У $f(z) = \frac{1}{(g(z)-2\pi i)(g(z)+\pi i)} = \frac{1}{h(z)}$ точка $z = 3\sqrt{2}$ — полюс 1 порядка. Вычет равен $\frac{1}{h'(3\sqrt{2})} = \frac{1}{g'(3\sqrt{2})((g(3\sqrt{2})-2\pi i)+(g(3\sqrt{2})+\pi i))} = \frac{1}{6\sqrt{2}/17\cdot(0+(2\pi i+\pi i))} = -\frac{17i}{18\sqrt{2}\pi}$. Отсюда $I = -2\pi i \cdot \frac{-17i}{18\sqrt{2}\pi} = \frac{17}{9\sqrt{2}}$.