Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 1, осенний семестр 1998/99 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию
$$f(z) = \frac{7z^2}{z^2 + 5iz + 6}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = \pi i$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z) = \frac{\sin \pi z + \operatorname{ch} \frac{i\pi}{z}}{\left(i + e^{\frac{i\pi}{z}}\right)^3} .$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $$\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z + \pi}{\operatorname{th}(2iz) + i \operatorname{ctg} 3z}\, dz .$$

---

4. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x - 2)}{x^2 + 2x + 10}\, dx .$$

---

5. $$\int\limits_{1}^{2} \sqrt[4]{(x-1)(2-x)^3} .$$

---

6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{\dfrac{3-z}{z}}$ в плоскости с разрезами по кривым $\{|z| = 3,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и $\left\{\left|z + \dfrac{3}{2}\right| = \dfrac{3}{2}\,,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\right\}$ такая, что $h(-1) = 2i$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$ и вычислить
$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^2 h(z)}{3 + 4z} .$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 2, осенний семестр 1998/99 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию
$$f(z)=\frac{z^2+6iz+3}{z^2+2iz+3}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z=ie$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z)=\frac{e^{\cos\frac{\pi i}{2z}}-1}{i+\operatorname{sh}\frac{3\pi z}{2}}\,.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $$\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z+\pi i}{\operatorname{cth}3z-\operatorname{th}2z}\,dz\,.$$

---

4. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(7x-1)}{x^2+4x+5}\,dx\,.$$

---

5. $$\int\limits_{-2}^{1}\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}\,.$$

---

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\frac{z+5}{1-z}$ в плоскости с разрезом по кривой $\{|z+2|=3,\ \operatorname{Im}z\geqslant 0\}$, такая, что $\operatorname{Im}g(10)=-3\pi$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2)$ в окрестности точки $z=-2$ и вычислить
$$\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{(z+2+3\pi i)g(z)}{(z+2)^2}\,.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 3, осенний семестр 1998/99 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию
$$f(z) = \frac{3z^2 - 8iz - 6}{z^2 - 3iz - 2}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = \dfrac{\pi}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z) = \frac{\operatorname{sh} \pi z - \cos \frac{i\pi}{z}}{\left(i - e^{\frac{\pi}{z}}\right)^2} .$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{(2z - \pi)}{\operatorname{tg} 2z + \operatorname{ctg} 3z}\, dz .$

---

4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x+5)}{x^2 - 6x + 18}\, dx .$

---

5. $\displaystyle\int\limits_{-3}^{1} \sqrt[4]{(x+3)^3(1-x)} .$

---

6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{2z - z^2}$ в плоскости с разрезом по кривой $\{|z-1| = 1,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ такая, что $h(1) = 1$. Разложить $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$ и вычислить
$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{zh(z)}{2z+1} .$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по ТФКП

Курс: 3, Вариант: 4, осенний семестр 1998/99 уч.г.

---

1. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию
$$f(z) = \frac{3iz^2}{z^2 - 5iz - 4}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z = 3i$. Указать границы кольца сходимости.

---

2. Исследовать особые точки функции
$$f(z) = \frac{e^{\sin \frac{\pi i}{z}} - 1}{\operatorname{ch}^4 \pi z}\,.$$
Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы:

---

3. $$\int\limits_{|z|=2} \frac{2z - \pi i}{\operatorname{ctg}(3iz) + i \operatorname{th} 2z}\, dz\,.$$

---

4. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x+1)}{x^2 + 6x + 10}\, dx\,.$$

---

5. $$\int\limits_{-3}^{-1} \sqrt[3]{(x+3)(x+1)^2}\, dx\,.$$

---

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} \dfrac{z-2}{z+2}$ в плоскости с разрезом по кривой $\{|z| = 2,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, такая, что $g(0) = -5\pi i$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$ и вычислить
$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^2 g(z)}{1 + \pi i z}\,.$$

Ответы

Вариант 81

1. $f(z) = \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n + 1 - 6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{6i}\right)^n$, $1 < |z| < 6$.

2. $z_k = \frac{2}{4k-1}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 3-го порядка;

$z_0 = -2$ — полюс 2-го порядка;

$z = 0$ — неизолир.ос.т.; $z = \infty$ — С.О.Т.

3. $-4\pi^2$. 4. $\frac{\pi}{3}e^{-9}\cos 5$. 5. $\frac{3\sqrt{2}\pi}{32}$.

6. $f(z) = -i\sum_{n=0}^{\infty}C_{1/2}^n\left(-\frac{3}{z}\right)^n$, $|z| > 3$; $\operatorname*{res}_{\infty} F(z) = \frac{9}{64}i$.

Вариант 82

1. $f(z) = \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3i}\right)^n$, $1 < |z| < 3$.

2. $z_k = -\frac{(1+4k)i}{3}$, $k = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ — полюсы 2-го порядка;

$z_0 = -\frac{i}{3}$, $z_{-1} = i$ — полюсы 1-го порядка;

$z = 0$ — С.О.Т.; $z = \infty$ — неизолир.ос.т.

3. $-4\pi^2$. 4. $-\pi e^{-7}\sin 15$. 5. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

6. $f(z) = -2\pi i + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{z+2}{3}\right)^{2n+1}$, $|z+2| < 3$; $\operatorname*{res}_{-2} F(z) = 0$.

Вариант 83

1. $f(z) = -\frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n + 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n, \quad 1 < |z| < 2\,.$

2. $z_k = -\frac{2i}{1+4k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 2-го порядка;

   $z_0 = -2i$ — полюс 1-го порядка;

   $z = 0$ — неизолир.ос.т.; $z = \infty$ — С.О.Т.

3. $4\pi^2 i\,.$ 4. $\frac{\pi}{3}e^{-3}\cos 8\,.$ 5. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}\,.$

6. $f(z) = iz\sum_{n=0}^{\infty}C_{1/2}^n\left(-\frac{2}{z}\right)^n, \quad |z| > 2\,; \quad \operatorname{res}_{\infty} F(z) = -\frac{i}{8}\,.$

Вариант 84

1. $f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n - i - 4i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4i}\right)^n, \quad 1 < |z| < 4\,.$

2. $z_k = i\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad k = 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы 4-го порядка;

   $z_0 = \frac{i}{2}, \quad z_{-1} = -\frac{i}{2}$ — полюсы 3-го порядка;

   $z = 0$ — С.О.Т.; $z = \infty$ — неизолир.ос.т.

3. $4\pi^2 i\,.$ 4. $-\pi e^{-2}\sin 5\,.$ 5. $\frac{8\pi}{9\sqrt{3}}\,.$

6. $f(z) = -4\pi i - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n+1}, \quad |z| > 2\,; \quad \operatorname{res}_{\infty} F(z) = 0\,.$