

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2001/2002 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.③ Найти первый и второй дифференциалы функции

$$f(x, y) = \ln(\sin xy) \text{ в точке } \left(1, \frac{\pi}{4}\right).$$

2.④ Найти длину кривой $(x/\sqrt{2})^{2/3} + y^{2/3} = 1$ от точки $(\sqrt{2}, 0)$ до точки $(0, 1)$.

3.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \sin \left(2x + \sqrt[3]{x^5 + 3y^5}\right).$$

4.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^3 \ln x}{(x-\sqrt{x})^\alpha} dx$.

5.⑤ Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{(x + \operatorname{arctg} x)^\alpha} dx.$$

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$.

7.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = n^2 \left(\operatorname{ch} \frac{1}{nx} - \cos \frac{1}{nx}\right)$ на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

8.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{x+n^2} \sin \sqrt{\frac{x}{n}} \text{ на интервалах } (0, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

9.④ Разложить по степеням $\left(x + \frac{1}{5}\right)$ функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{3x}{x+2}$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.④ Доказать неравенство $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}^{-1}(a \sin x) dx < \frac{\pi}{2a} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} a, \quad a > 0.$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2001/2002 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.③ Найти первый и второй дифференциалы функции

$$f(x, y) = \operatorname{sh}(x e^{-y} + 1) \text{ в точке } (1, 0).$$

2.④ Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox кривой

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x, \quad 1 \leq x \leq e.$$

3.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 3x + \operatorname{arctg} \left(\sqrt[3]{x^3 - 2y^3} \right).$$

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{4+x^2}}{\ln^\alpha(1+x)} dx.$$

5.⑤ Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{(x + \ln x)^\alpha} dx.$$

6.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n^n}.$$

7.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = (n + \ln x) \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)$ на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

8.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 + n^3 x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{nx}} \text{ на интервалах } (0, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

9.④ Разложить по степеням x функцию $f(x) = x \operatorname{arccos} \left(\frac{2x}{\sqrt{25 + 4x^2}} \right)$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.④ Доказать неравенство

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{arccotg}(a \sin x) dx < \frac{\pi}{2} \operatorname{arccotg} a + \frac{\pi}{4a} \ln(1 + a^2), \quad a > 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2001/2002 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов	
Фамилия проверяющего	

Оценка	
Фамилия экзаменатора	

1.③ Найти первый и второй дифференциалы функции

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + \sin y) \text{ в точке } (1, 0).$$

2.④ Найти объем тела, образованного вращением относительно оси Ox фигуры, ограниченной кривыми

$$y = (3 + 2 \cos^2 x)^{-1/2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

3.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arcsin} \left(5y + \sqrt[3]{x^5 + 3y^5} \right).$$

4.④ Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arcsin} \frac{x-1}{x}}{(\sqrt[3]{x-1} - \ln x)^\alpha} dx$.

5.⑤ Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(e^x)}{\operatorname{ch}^\alpha x} dx.$$

6.③ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2}$.

7.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = n^2 \operatorname{tg} \frac{x}{n^2}$ на интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

8.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1+x\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 x} \right) \text{ на интервалах } (0, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

9.④ Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = x \ln \left(2x + \sqrt{5 + 4x^2} \right)$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.④ Доказать неравенство $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(a \sin x)} < \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} a, \quad a > 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 2 2001/2002 уч.г.

Фамилия студента _____ № группы _____

Сумма баллов		Оценка	
Фамилия проверяющего		Фамилия экзаменатора	

1.③ Найти первый и второй дифференциалы функции

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y} \text{ в точке } (1, 2).$$

2.④ Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси

$$Oy \text{ кривой } x = t + \sin t \cos t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию

$$f(x, y) = 4x + \sin \left(\sqrt[3]{x^5 - 3y^5} \right).$$

4.④ Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)x^{-\alpha}}{e^x(1+x^3)^\alpha} dx.$$

5.⑤ Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^3)}{(x^3 + \sqrt{1+x})^\alpha} dx.$$

6.③ Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}$$

7.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость последователь-

$$\text{ность } f_n(x) = \sqrt{n} \left(e^{\frac{x}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \text{ на интервалах } (0, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

8.⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{x^3 + n}} \operatorname{sh} \frac{x}{n^2} \text{ на интервалах } (0, 1) \text{ и } (1, +\infty).$$

9.④ Разложить по степеням $(x-3)$ функцию

$$f(x) = 2(x-3) \ln(5 + \sqrt{13 + 4x})$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

10.④ Доказать неравенство
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(a \sin x) dx < \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\sin 2a}{2a} \right), \quad 0 < a < \frac{\pi}{4}.$$

Ответы. Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2001/2002 г. Вариант 21

$$1. \textcircled{3} \quad df\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} dx + dy, \quad d^2 f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{8} dx^2 + (2 - \pi) dx dy - 2dy^2$$

$$2. \textcircled{4} \quad S = \sqrt{8} - 1$$

3. \textcircled{3} Дифференцируема

4. \textcircled{4} Сходится при $4 < \alpha < 5$

5. \textcircled{5} Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $-1 < \alpha \leq 1$, расходится при $\alpha \leq -1$

6. \textcircled{3} Ряд сходится

7. \textcircled{5} Предельная функция $f(x) = \frac{2}{x^2}$, сходится равномерно на $(1, +\infty)$, неравномерно на $(0, 1)$

8. \textcircled{5} Сходится равномерно на $(0, 1)$, неравномерно на $(1, +\infty)$

$$9. \textcircled{4} \quad f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{5}{3}\right)^{2k+1} \frac{\left(x + \frac{1}{5}\right)^{2k+1}}{2k+1}, \quad R = \frac{3}{5}$$

Ответы. Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2001/2002 г. Вариант 22

$$1. \textcircled{3} \quad df(1, 0) = \operatorname{ch} 2(dx - dy), \\ d^2 f(1, 0) = \operatorname{sh} 2 dx^2 - 2(\operatorname{sh} 2 + \operatorname{ch} 2) dx dy + (\operatorname{sh} 2 + \operatorname{ch} 2) dy^2$$

$$2. \textcircled{4} \quad S = 2\pi \int_1^e y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \frac{\pi}{16}(e^4 - 9)$$

3. \textcircled{3} Недифференцируема

4. \textcircled{4} Сходится при $1 < \alpha < 2$

5. \textcircled{5} Сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, расходится при $\alpha \leq \frac{1}{2}$

6. \textcircled{3} Ряд сходится

7. \textcircled{5} Предельная функция $f(x) = x^2$, сходится равномерно на $(0, 1)$, неравномерно на $(1, +\infty)$

8. \textcircled{5} Сходится неравномерно на $(0, 1)$, равномерно на $(1, +\infty)$

$$9. \textcircled{4} \quad f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{2k+2} x^{2k+2}, \quad R = \frac{5}{2}$$

Ответы. Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2001/2002 г. Вариант 23

$$1.③ \quad df(1, 0) = dx + \frac{1}{2}dy, \quad d^2f(1, 0) = -dx^2 - 2dx dy - \frac{1}{2}dy^2$$

$$2.④ \quad V = \frac{\pi}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

3.③ Дифференцируема

4.④ Сходится при $3 < \alpha < 6$

5.⑤ Сходится абсолютно при $\alpha > 0$, сходится условно при $-1 < \alpha \leq 0$,
расходится при $\alpha \leq -1$

6.③ Ряд сходится

7.⑤ Предельная функция $f(x) = x$, сходится равномерно на $(0, 1)$,
неравномерно на $(1, +\infty)$

8.⑤ Сходится неравномерно на $(0, 1)$, равномерно на $(1, +\infty)$

$$9.④ \quad f(x) = \frac{\ln 5}{2}x + \frac{2x^2}{\sqrt{5}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(-1)^n(2n-1)!!}{5^{n+\frac{1}{2}}n!(2n+1)}x^{2n+2}, \quad R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответы. Математический анализ, 1 курс, 2 семестр, 2001/2002 г. Вариант 24

$$1.③ \quad df(1, 2) = \frac{dx}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}dy, \quad d^2f(1, 2) = \frac{1}{12\sqrt{3}}(4dx^2 - 12dx dy - 7dy^2)$$

$$2.④ \quad S = 2\pi^2 - \frac{8}{3}\pi$$

3.③ Дифференцируема

4.④ Сходится при $\frac{1}{4} < \alpha < 3$

5.⑤ Сходится абсолютно при $\alpha > \frac{1}{3}$, сходится условно при $-\frac{2}{3} < \alpha \leq \frac{1}{3}$,
расходится при $\alpha \leq -\frac{2}{3}$

6.③ Ряд сходится

7.⑤ Предельная функция $f(x) = x$, сходится равномерно на $(0, 1)$,
неравномерно на $(1, +\infty)$

8.⑤ Сходится равномерно на $(0, 1)$, неравномерно на $(1, +\infty)$

$$9.④ \quad f(x) = 2 \ln 10(x-3) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!2^k}{25^k k! k} (x-3)^{k+1}, \quad R = \frac{25}{4}$$
