5 семестр 2007/2008 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням $(z-1)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 4$:

$$f(z) = -\frac{14i}{z^2+49} + \frac{1+7i}{z^2 - z(7i-1) - 7i}.$$

2.④ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{(4\pi^2 z^2 - 1)^2 e^{\left(\frac{1}{z-1}\right)}}{\left(1-\cos\frac{1}{z}\right)^2 z^8}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z-1)^3 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z+1)^2}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)\cos(2-2x)}{x^2+4x+5}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{-3}^{-1} \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2(x+3)^3}}{x-1}\,dx.$$

6.⑥ Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{\dfrac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{i-z}}\right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C}:\ z = i + t,\ t \geqslant 0\}$ определена условием $g'(0) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{5\pi i}{4}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2i)$.

7.④ **(только для 6 факультета).** Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом $\{x = 0,\ y \in [0; \sqrt{2}]\}$ так, чтобы граничные точки $\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}i;\ \sqrt{2}\}$ переходили соответственно в граничные точки $\{1;\ 2;\ 4\}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 71

5 семестр 2007/2008 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням $(z-i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 3i$:

$$f(z) = \frac{2z}{iz^2 + 4i} + \frac{z(i+1)}{z^2 - z(2-2i) - 4i}.$$

2.④ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{z-i}\right) e^{\frac{1}{z}}}{\left(1 - \cos\frac{1}{z-i}\right)^3 z^6}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)^3 \sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}\, dz.$$

4.④

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin(1-x)}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

5.⑥

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 \sqrt[7]{(x+1)^2 (x+2)^5}}.$$

6.⑥ Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = e^{-z} \cdot \mathrm{Ln}(z-1)$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C}\colon\ z = 1 - it\,,\ t \geqslant 0\}$ определена условием $g''(0) = 1 - i\pi$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$.

7.④ **(только для 6 факультета).** Отобразить конформно верхнюю полуплоскость $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ на круг $\{|w| < 2\}$ так, чтобы $w(1+i) = 0\,,\ w(1) = 2i\,.$

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 72

5 семестр 2007/2008 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням $(z-1)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2 - i$:

$$f(z) = \frac{z(i+1) - 5i - 2}{z^2 - 7z + 10} - \frac{5 + 3i}{z^2 - z(5 - 3i) - 15i}.$$

2.④ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{(\pi^2 z^2 - 4)^4 \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)}{\left(1 + \cos\frac{2}{z}\right)^2 z^5}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{(z-1)^2 e^{\left(\frac{1}{z-1}\right)}}{z+1}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)\cos(1-x)}{x^2 - 4x + 5}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{1}^{4} \frac{\sqrt[5]{(x-1)(4-x)^4}}{x+2}\,dx.$$

6.⑥ Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{e^{\frac{iz}{3}} \cdot \sqrt[3]{1+z}\right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C}\colon\ z = -1 - it,\ t \geqslant 0\}$ определена условием $g'(0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} e^{\frac{7\pi i}{12}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2)$.

7.④ **(только для 6 факультета).** Отобразить конформно полосу $\{0 < y < \pi\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$ так, чтобы $w\left(\dfrac{\pi i}{2}\right) = 0$, $w'\left(\dfrac{\pi i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 73

5 семестр 2007/2008 уч.г.

№ группы	**Фамилия студента**	**Сумма баллов**	**Оценка**	**Подпись препод.**

1.④ Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням $(z+i)$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{2z-4}{z^2-4z+3} - \frac{z(2i+1)}{z^2+z(2i-1)-2i}.$$

2.④ Исследовать особые точки функции:

$$f(z) = \frac{\left(1-\cos\frac{1}{z+i}\right)(e^z+1)}{\sin^3\left(\frac{1}{z+i}\right)(z^2+\pi^2)}.$$

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3.④
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{(z+1)^2 e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)}\,dz.$$

4.④
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin(2-x)}{x^2-2x+2}\,dx.$$

5.⑥
$$\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2\sqrt[7]{(x-2)(x-4)^6}}.$$

6.⑥ Регулярная ветвь многозначной функции $g(z) = \left\{\cos z \cdot \sqrt[3]{z+i}\right\}$ в плоскости с разрезом $\{z \in \mathbb{C}:\ z = -i-t,\ t \geqslant 0\}$ определена условием $g''(0) = \frac{7}{9}e^{\frac{7\pi i}{6}}$. Найти первые три члена разложения $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+2i)$.

7.④ **(только для 6 факультета).** Найти какое-либо конформное преобразование $w(z)$, переводящее полукруг $\{|z|<1,\ y>0\}$ в верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ такое, что $w(1)=0$, $w(-1)=4$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - 74

Ответы. Вариант 71

1. (4). $f(z)=\frac{1}{z+7i}-\frac{1}{z+1}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^n(-2)^{-n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1+7i)^{n+1}}$; $2<|z-1|<\sqrt{50}$.

2. (4) $z=1$ – СОТ; $z=0$ – неизолированная особая точка; $z=\pm\frac{1}{2\pi}$ – полюса второго порядка; $z=\frac{1}{2\pi k}$, $k\neq 0$, $k\neq\pm1$ – полюса четвертого порядка; $z=\infty$ – УОТ.

3. (4) $I=-2\pi i\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-8\pi i$; $\operatorname{res}_{\infty}f(z)=4$.

4. (4) $I=\frac{\pi}{e^2}\sin 6$; $I=Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+2)e^{i(2x-2)}}{x^2+4x+5}dx=Re\left(2\pi i\operatorname{res}_{z=-2+i}f(z)\right)\right)$

$=Re\left(\pi i e^{-6i}e^{-2}\right)$

5. (6) $I=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\left(2^{\frac{8}{5}}-\frac{16}{5}\right)$; $I=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=1}f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{4\pi i}{5}}\right)^{-1}$

$\operatorname{res}_{z=1}f(z)=2^{\frac{8}{5}}e^{-\frac{2\pi i}{5}}$; $\operatorname{res}_{z=\infty}f(z)=-\frac{16}{5}e^{-\frac{2\pi i}{5}}$.

6 (6) $g(z)=e^{\frac{\pi i}{4}}\left[\cos 2+i\left(\sin 2+\frac{\cos 2}{2}\right)(z-2i)+\left(\frac{1}{4}\cos 2-\sin 2\right)\frac{(z-2i)^2}{2}\right]+\dots$

условие: $\sqrt{i-z}\,\Big|_{z=0}=e^{\frac{\pi i}{4}}$, тогда $\sqrt{i-z}\,\Big|_{z=2i}=e^{-\frac{\pi i}{4}}$

$g(2i)=\frac{ch 2i}{\sqrt{i-z}}\Big|_{z=2i}=\cos 2\,e^{\frac{\pi i}{4}}$; $g'(2i)=\left(\frac{sh z}{\sqrt{i-z}}+\frac{ch z\sqrt{i-z}}{2(i-z)^2}\right)\Big|_{z=2i}=$

$=\frac{sh\,2i}{e^{-\frac{\pi i}{4}}}+\frac{(ch\,2i)e^{-\frac{\pi i}{4}}}{-2}=i\sin 2e^{\frac{\pi i}{4}}-\frac{\cos(2)}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}=i\left(\sin 2+\frac{\cos 2}{2}\right)e^{\frac{\pi i}{4}}$

$g''(2i)=\left(\frac{ch z}{\sqrt{i-z}}+2sh z\left(\frac{1}{\sqrt{i-z}}\right)'+ch z\left(\frac{1}{\sqrt{i-z}}\right)''\right)\Big|_{z=2i}=\left(\frac{ch z}{\sqrt{i-z}}+\frac{sh z\sqrt{i-z}}{(i-z)^2}+ch z\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt{i-z}}{(i-z)^3}\right)\Big|_{z=2i}$

$=ch 2i\,e^{\frac{\pi i}{4}}-sh 2i\,e^{-\frac{\pi i}{4}}+\frac{3}{4}\frac{ch(2i)\,e^{-\frac{\pi i}{4}}}{(-i)^3}=e^{\frac{\pi i}{4}}\left(\cos 2-\sin 2-\frac{3}{4}\cos 2\right)=e^{\frac{\pi i}{4}}\left(\frac{1}{4}\cos 2-\sin 2\right)$

7 (4). $z_1=\sqrt{z^2+2}$, $(-\sqrt{2}\to-2;\ \sqrt{2}\,i\to 0,\ \sqrt{2}\to 2)$, $w=\frac{12+2z_1}{6-z_1}$.

Ответы. Вариант 72

1. (4). $f(z)=\frac{-i}{z-2i}+\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^2}{(2-i)^{n+1}}$; $1<|z-i|<\sqrt{5}$.

2. (4). $z=i+\frac{1}{2\pi k}$, $k\neq 0$ – полюса четвертого порядка; $z=i$ – неизолированная особая точка; $z=0$ – СОТ; $z=\infty$ – УОТ.

3. (4). $I=-2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=\frac{41\pi i}{3}$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{41}{6}$.

4. (4) $I=-\frac{\pi}{e}\cos 2$; $I=-\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)e^{i(x-1)}}{x^2+2x+1}dx\right)=-\operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot\operatorname{res}_{z=-1+i} f(z)\right)$

$=-\operatorname{Im}\left(i\pi e^{-1}e^{-2i}\right)$.

5. (6) $I=\frac{\frac{9}{14}\pi 2^{-5/7}}{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}$; $I=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=0} f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)\right)\cdot\left(1-e^{\frac{4\pi i}{7}}\right)^{-1}$.

$\operatorname{res}_{z=0} f(z)=\left(\frac{1}{\sqrt[7]{\varphi(z)}}\right)'\Big|_{z=0}$, где $\varphi(z)=(z+1)^2(z+2)^5$; $\operatorname{res}_{z=0} f(z)=-\frac{1}{7}\frac{\varphi'(z)}{\sqrt[7]{\varphi(z)}\cdot\varphi(z)}\Big|_{z=0}$

$=-\frac{9}{14}2^{-5/7}e^{\frac{2\pi i}{7}}$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=0$.

6. (6) $g(z)=-2\pi i e^{-2}+e^{-2}(2\pi i+1)(z-2)-e^{-2}(2\pi i+3)\frac{(z-2)^2}{2}+\ldots$

Из условия: $\ln(z-1)\Big|_{z=0}=-\pi i$, тогда $\ln(z-1)\Big|_{z=2}=-2\pi i$

$g'(z)=e^{-z}\left(-\ln(z-1)+\frac{1}{z-1}\right)$; $g''(z)=e^{-z}\left(\ln(z-1)-\frac{2}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}\right)$

Тогда $g(2)=-2\pi i e^{-2}$; $g'(2)=e^{-2}(2\pi i+1)$; $g''(2)=e^{-2}(-2\pi i-3)$.

7. (4) $w=-2i\frac{z-1-i}{z-1+i}$

Ответы. Вариант 73.

1. (4) $f(z) = \frac{i}{z-2} + \frac{1}{z+3i} = i\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{(1+3i)^{n+1}}$

2. (4) $z = \frac{2}{\pi+2\pi k}$, $k \neq 0, k \neq -1$ – полюса четвертого порядка; $z = \pm\frac{2}{\pi}$ – УОТ;

$z=-2$ – СОТ, $z=0$ – неизолированная особая точка; $z=\infty$ – полюс второго порядка.

3 (4) $I = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 5\pi i$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{5}{2}$.

4. (4). $I = -\frac{\pi \sin 1}{e}$; $I = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-2)e^{i(x-1)}}{x^2-4x+5}dx\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{res}_{z=2+i} f(z)\right)$

$= \operatorname{Re}\left(\frac{\pi i e^{i}}{e}\right)$.

5. (6). $I = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}\left(\frac{27}{5} - 3\cdot 2^{\frac{4}{5}}\right)$; $I = 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=-2} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)\right)\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^{-1}$;

$\operatorname{res}_{z=-2} f(z) = 3\cdot 2^{\frac{4}{5}} e^{\frac{\pi i}{5}}$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{27}{5} e^{\frac{-4\pi i}{5}}$.

6. (6) $g(z) = e^{\frac{i(5\pi-2)}{3}}\left(1 + \frac{i-1}{3}(z+2) - \frac{3+2i}{18}(z+2)^2 + \dots\right)$

Из условия: $\sqrt[3]{1+z}\Big|_{z=0} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, тогда $\sqrt[3]{1+z}\Big|_{z=-2} = e^{\frac{5\pi i}{3}}$,

$g(-2) = e^{-\frac{2i}{3}} e^{\frac{5\pi i}{3}} = e^{\frac{i(5\pi-2)}{3}}$; $g'(-2) = e^{\frac{iz}{3}}\left(\sqrt[3]{1+z}\cdot\frac{i}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{1+z}}{1+z}\right)\Big|_{z=-2} = \frac{e^{\frac{i(5\pi-2)}{3}}}{3}(i-1)$;

$g''(-2) = e^{\frac{iz}{3}}\left(\sqrt[3]{1+z}\left(\frac{i}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{i}{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{1+z}}{1+z} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt[3]{1+z}}{(1+z)^2}\right)\Big|_{z=-2} = \frac{e^{\frac{i(5\pi-2)}{3}}(-3-2i)}{9}$

7 (4) $w = e^{-\frac{\pi i}{4}}\cdot\frac{e^z - i}{e^z + i}$

Ответы. Вариант 74.

1. (4) $f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{2i}{z+2i}=2\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{z+i}{-i}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(3+i)^{n+1}}.$

2. (4) $z=-i+\frac{1}{2\pi k}$, $k\neq 0$ – полюса первого порядка; $z=-i+\frac{1}{\pi+2\pi k}$ – полюса третьего порядка; $z=-i$ – неизолированная особая точка; $z=\pm\pi i$ – УОТ; $z=\infty$ – СОТ.

3. (4) $I=-2\pi i\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=15\pi i$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{15}{2}$

4. (4) $I=-\frac{\pi}{e}\cos 1$; $I=-\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)e^{i(x-2)}}{x^2-2x+2}dx\right)=-\operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{res}_{z=1+i} f(z)\right)$

$=-\operatorname{Im}(\pi e e^{-i}e^{-1}).$

5. (6). $I=\frac{\pi\, 2^{-\frac{6}{7}}}{7\cdot\sin\frac{\pi}{7}}$; $I=2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=0} f(z)+\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)\right)\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{7}}\right)^{-1}.$

$\operatorname{res} f(z)\Big|_{z=0}=\left(\frac{1}{\sqrt[7]{\varphi(z)}}\right)'\Big|_{z=0}$, где $\varphi(z)=(z-2)(z-4)^6$; $\operatorname{res}_{z=0} f(z)=-\frac{1}{7}\frac{\varphi'(z)}{\sqrt[7]{\varphi(z)}\cdot\varphi(z)}\Big|_{z=0}$

$=\frac{1}{7}2^{-\frac{6}{7}}e^{-\frac{\pi i}{7}}$; $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)=0.$

6 (6) $g(z)=e^{-\frac{\pi i}{6}}\left(\operatorname{ch}2+i(\operatorname{sh}2+\frac{1}{3}\operatorname{ch}2)(z+2i)-\left(\frac{7}{9}\operatorname{ch}2+\frac{2}{3}\operatorname{sh}2\right)\frac{(z+2i)^2}{2}\right)+\dots$

Из условия: $\sqrt[3]{z+i}\Big|_{z=0}=e^{\frac{\pi i}{6}}$; тогда $\sqrt[3]{z+i}\Big|_{z=-2i}=e^{-\frac{\pi i}{6}}$;

$g(-2i)=\cos(-2i)e^{-\frac{\pi i}{6}}=\operatorname{ch}2\, e^{-\frac{\pi i}{6}}$; $g'(-2i)=\left(-\sqrt[3]{z+i}\cdot\sin z+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{z+i}}{z+i}\cos z\right)\Big|_{z=-2i}$

$=e^{-\frac{\pi i}{6}}\left(-\sin(-2i)+\frac{1}{3}\frac{\cos(-2i)}{-i}\right)=e^{-\frac{\pi i}{6}}\left(i\operatorname{sh}2+\frac{i}{3}\operatorname{ch}2\right)$;

$g''(-2i)=\left(-\cos z\sqrt[3]{i+z}-\frac{2}{3}\sin z\frac{\sqrt[3]{i+z}}{i+z}+\cos z\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{\sqrt[3]{i+z}}{(i+z)^2}\right)\Big|_{z=-2i}=$

$e^{-\frac{\pi i}{6}}\left(-\cos(-2i)-\frac{2}{3}\frac{\sin(-2i)}{-i}-\frac{2}{9}\frac{\cos(-2i)}{(-i)^2}\right)=e^{-\frac{\pi i}{6}}\left(-\frac{7}{9}\operatorname{ch}2-\frac{2}{3}\operatorname{sh}2\right).$

(4) $z_1=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w=2z_1+2$. (одно из возможных вариантов).