Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по математическому анализу
Курс: 1, Вариант: 1, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.② Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\operatorname{sh} x \, \cos x)^{\ln x}}{\sqrt{1-4x^2}}.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы:
а) $\displaystyle\int \frac{(7x+18)\,dx}{(x-3)(x^2+x+1)}$, б) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$.

3.② Найти $y''_{xx}(t)$, если
$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \left(2t - \frac{1}{t}\right)^2.$$

4.③ Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$, если
$$y = (x+1)^2 \ln(3x^2 - x - 2).$$
Полученное выражение можно не упрощать.

5.④ Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (3x^2+2x)(1+\cos(6x+2))$$
в окрестности точки $x_0 = -\dfrac{1}{3}$ до $o\left(\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$.

6.⑥ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{x}{1+x}\right) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2\operatorname{arctg} x}.$$

7.⑤ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1-x)^{-2} - (1+x)^{-2}}{\operatorname{tg}(4\arcsin x)}\right)^{\frac{1}{\ln \operatorname{ch} x}}.$$

8.⑦ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} - \frac{8}{\sqrt{3}}x\right)}{(\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{cth} x} - (1+\sin 3x)^{3/2}}.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по математическому анализу
Курс: 1, Вариант: 2, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.② Найти производную функции

$$y(x) = \frac{(\operatorname{arctg} x \, \ln x)^{\cos x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}.$$

Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{(8x+22)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+3)}$, б) $\displaystyle\int e^x \ln(\sqrt{e^x - 1} + \sqrt{e^x + 1})\,dx$.

3.② Найти $y''_{xx}(t)$, если

$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \left(3t - \frac{1}{t}\right)^2.$$

4.③ Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$, если

$$y = (x^2+1)\sin x \, \sin 2x.$$

Полученное выражение можно не упрощать.

5.④ Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = (4x^2 + 2x)(\exp(16x^2 + 8x + 1) - 3)$$

в окрестности точки $x_0 = -\dfrac{1}{4}$ до $o\left(\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^{2n+1}\right)$.

6.⑥ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^{\arcsin x} + x^2}{\operatorname{tg}\sin x - \operatorname{arctg} x}.$$

7.⑤ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\operatorname{tg}(\operatorname{sh} x)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\cos x} - 1}}.$$

8.⑦ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 8x\right)}{(\cos(\sqrt{3}x))^{\operatorname{ctg} x} - (1 - \operatorname{sh} 4x)^{3/8}}.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по математическому анализу
Курс: 1, Вариант: 3, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.② Найти производную функции

$$y(x) = \frac{(\operatorname{sh} x \ \arccos x)^{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{(4x+22)\,dx}{(x+2)(x^2+3x+4)}$, б) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{2+\ln x}{1-2\ln x}\,dx$.

3.② Найти $y''_{xx}(t)$, если

$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \left(\frac{2}{t} - t\right)^2.$$

4.③ Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$, если

$$y = (x-1)^2 \ln\left(3 - \frac{5}{x+1}\right).$$

Полученное выражение можно не упрощать.

5.④ Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = (5x^2 - 6x)(\operatorname{ch}(5x-3) + 4)$$

в окрестности точки $x_0 = \dfrac{3}{5}$ до $o\left(\left(x - \dfrac{3}{5}\right)^{2n+1}\right)$.

6.⑥ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+3x} - \operatorname{tg} x - e^{-x^2}}.$$

7.⑤ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}}{\frac{2}{3}\arcsin(x \operatorname{ch} x)}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}.$$

8.⑦ Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x\right) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}}x\right)}{(\operatorname{ch}(x\sqrt{5}))^{\operatorname{ctg} x} - (1 - \operatorname{tg} 3x)^{-5/6}}.$$

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Семестровая контрольная работа по математическому анализу
Курс: 1, Вариант: 4, осенний семестр 2003/2004 уч.г.

1.② Найти производную функции
$$y(x) = \frac{(\sin x\ \operatorname{th} x)^{\sin x}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{2x}}}.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

---

2. Вычислить интегралы:
а) $\displaystyle\int \frac{(2x+33)\,dx}{(x+3)(x^2+2x+6)}$, б) $\displaystyle\int x\ln(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\,dx$.

3.② Найти $y''_{xx}(t)$, если
$$x(t) = \ln t, \quad y(t) = \left(\frac{3}{t} - t\right)^2.$$

4.③ Найти $y^{(n)}(x)$ для $n \geqslant 3$, если
$$y = (1-x^2)\sin 2x\ \cos x.$$
Полученное выражение можно не упрощать.

5.④ Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = (3x^2-2x)(\ln(6x-9x^2)+2)$$
в окрестности точки $x_0 = \dfrac{1}{3}$ до $o\left(\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}\right)$.

6.⑥ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x\ \cos x}.$$

7.⑤ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-x)^{-1/2}-(1+x)^{-1/2}}{\sin\left(2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} x}-1}}.$$

8.⑦ Вычислить предел:
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)-\operatorname{arctg}(\sqrt{3}+4\sqrt{3}x)}{(\cos(\sqrt{7}x))^{\operatorname{cth} x}-(1-\operatorname{th} 2x)^{7/4}}.$$

Ответы к семестровой контрольной работе 2003/2004 уч. г.

Вариант 1.

2.а. $3\ln|x-3|-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

2.б. $x\cdot arctg\,\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+c$

3. $y'_x=8t^2-\frac{2}{t^2}$; $y''_{xx}=16t^2+\frac{4}{t^2}$

4. $$(1+x)^2(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{3^n}{(3x+2)^n}+\frac{1}{(x-1)^n}\right)+2n(1+x)(-1)^n(n-2)!\left(\frac{3^{n-1}}{(3x+2)^{n-1}}+\frac{1}{(x-1)^{n-1}}\right)+$$
$$+n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)!\left(\frac{3^{n-2}}{(3x+2)^{n-2}}+\frac{1}{(x-1)^{n-2}}\right)$$

5. $$-\frac{2}{3}+12\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}6^{2k-1}}{(2k)}\left(2k^2-k+2\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)^{2k}+o\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right).$$

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right]}{\left[2x+\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]-\left[2x-\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]}=\frac{3}{4}.$$

7. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2x^2+o\left(x^2\right)}{1+\frac{11}{2}x^2+o\left(x^2\right)}\right)^{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=e^{-7}.$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{41}{\sqrt{3}}x^2+o\left(x^2\right)\right]}{\left[1+\frac{9}{2}x+\frac{81}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[1+\frac{9}{2}x+\frac{27}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]}=\frac{52}{81\sqrt{3}}.$$

Вариант 2.

2а. $\sin|x-1| - \frac{5}{2}\ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

2б. $e^x \cdot \ln\left(\sqrt{e^x-1} + \sqrt{e^x+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x}-1} + C$

3 $y'_x = 18t^2 - \frac{2}{t^2}$; $y''_{xx} = 36t^2 + \frac{4}{t^2}$

4. $\frac{x^2+1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) - 3^n\cos\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)\right) + nx\left(\cos\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right) - 3^{n-1}\cos\left(3x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right) - 3^{n-2}\cos\left(3x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right)$.

5. $\frac{1}{2} - 12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{4\cdot 16^{k-1}}{k!}(k-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)^{2k} + o\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right)$.

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right] - \left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right] + x^2}{\left[x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right] - \left[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]} = \frac{1}{3}$$

7. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\right)^{-\frac{x^2}{4}+o(x^2)} = e^{3/2}.$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\pi}{3}-6x-9\sqrt{3}x^2+o(x^2)\right] - \left[\frac{\pi}{3}-6x+12\sqrt{3}x^2+o(x^2)\right]}{\left[1-\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}x^2+o(x^2)\right] - \left[1-\frac{3}{2}x-\frac{15}{8}x^2+o(x^2)\right]} = -7.$$

Ответы к семестровой контрольной работе 2003/2004 уч. г.
Вариант 3.

2.а. $7\ln|x+2|-\frac{7}{2}\ln\left(x^2+3x+4\right)+\frac{15}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+c$ 2.б. $\ln x\cdot arctg\frac{2+\ln x}{1-2\ln x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\ln^2 x\right)+c$

3. $y'_x=-\frac{8}{t^2}+2t^2$; $y''_{xx}=\frac{16}{t^2}+4t^2$.

4. $(x-1)^2(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{3^n}{(3x-2)^n}-\frac{1}{(x+1)^n}\right)+2n(x-1)(-1)^n(n-2)!\left(\frac{3^{n-1}}{(3x-2)^{n-1}}-\frac{1}{(x+1)^{n-1}}\right)+$

$+n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)!\left(\frac{3^{n-2}}{(3x-2)^{n-2}}-\frac{1}{(x+1)^{n-2}}\right)$

5. $-9+\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{5^{2k-1}}{(2k)!}\left(4k^2-2k-9\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{3}{5}\right)^{2n+1}\right)$.

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]-\left[x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]}{\left[1+x-x^2+\frac{5x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]-\left[x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]-\left[1-x^2+o\left(x^3\right)\right]}=\frac{3}{8}.$$

7. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{5}{27}x^2+o\left(x^2\right)}{1+\frac{2}{3}x^2+o\left(x^2\right)}\right)^{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=e^{\frac{26}{27}}.$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}x+\sqrt{3}x^2+o\left(x^2\right)\right]}{\left[1+\frac{5}{2}x+\frac{25}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[1+\frac{5}{2}x+\frac{55}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]}=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

299-27-l'1
Светлана
Иванова

Ответы к семестровой контрольной работе 2003/2004 уч. г.
Вариант 4.

2.a. $3\ln|x+3|-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+6\right)+\frac{8}{\sqrt{5}}\,arctg\frac{x+1}{\sqrt{5}}+c$ 2.б. $\frac{x^2}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{1}{4}\sqrt{x^4-1}+c$

3. $y'_x=-\frac{18}{t^2}+2t^2;\ \ y''_{xx}=\frac{36}{t^2}+4t^2.$

4. $$\frac{1-x^2}{2}\left(3^n\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\right)-nx\left(3^{n-1}\sin\left(3x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\right)-$$
$$-\frac{n(n-1)}{2}\left(3^{n-2}\sin\left(3x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right).$$

5. $$-\frac{2}{3}+9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-3)\cdot 9^{k-1}}{k(k-1)}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2k}+o\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\right).$$

6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]-\left[1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right]-x}{\left[x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]-\left[x-\frac{5x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]}=\frac{2}{7}.$$

7. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{5}{8}x^2+o\left(x^2\right)}{1-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)}\right)^{\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)}=e^3.$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\pi}{3}+3x-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[\left[\frac{\pi}{3}+3x-3\sqrt{3}x^2+o\left(x^2\right)\right]\right]}{\left[1-\frac{7}{2}x+\frac{49}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]-\left[1-\frac{7}{2}x+\frac{21}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right]}=\frac{9\sqrt{3}}{14}.$$