ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина Математический анализ Курс 1 Семестр 1 2002/2003 уч.г.

Фамилия студента Зинина О.Н. № группы 265

Сумма баллов	23+4=27	Оценка	Хор
Фамилия проверяющего	Ковшев	Фамилия экзаменатора	

1. Вычислить интегралы

1 а) ③ $\int e^{-2x}\operatorname{arcctg} e^{2x}\,dx$; 4 б) ④ $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

5 **2.**⑤ Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x\sqrt{1+x})+\ln(1+x+x^2)-\arcsin x-1}{e^{\operatorname{tg} x}-\operatorname{ch} x-x}$.

3. Построить графики функций

2 а) ④ $y=\dfrac{(2-x)^5}{(x-1)^4}$; 5 б) ⑤ $y=\sqrt[3]{x^2(6-|x|)}$.

4. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\sqrt{1-3x}$$

2 а) ② в окрестности $x_0=0$ до $o(x^3)$;

3 б) ④ в окрестности $x_0=-1$ до $o((x+1)^n)$;

– **5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $(-\pi,2\pi)$, при этом

$$f(x)=\frac{(\pi+2x)^2|\pi-2x|}{\cos x}\ \text{при}\ x\in(-\pi,2\pi),\ x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k=0,\pm1;$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4\pi^2.$$

4 **6.**④ Найти в точке $(-1;2)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $3x^2y+y^3=15+x^3$.

1 **7.**⑤ Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(e^{x\operatorname{ctg} x-1}+\dfrac{x^2}{3}\right)^{\frac{1}{x^4}+\ln^3 x}$.

0 **8.**⑦ Построить кривую $x=\dfrac{1}{t(t+1)},\quad y=\dfrac{(t-1)^2}{t}$.

— **9.**③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n>0$, $n=1,2,\ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{5}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ Курс $\boxed{1}$ Семестр $\boxed{1}$ 2002/2003 уч.г.

Фамилия студента Мельс С. В № группы 261

Сумма баллов	15 -2=13+2=15	Оценка	хор
Фамилия проверяющего	Черняев	Фамилия экзаменатора	[illegible]

1. Вычислить интегралы

3 а) ③ $\displaystyle\int \cos x \ln(2-\cos^2 x)\,dx$; 4 б) ④ $\displaystyle\int \frac{x^8}{(1-x^3)^{3/2}}\,dx$.

1+2 2.⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+3x-x^2}+\arcsin(\operatorname{tg} x)-1+\frac{4}{3}x^2}{2\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x\,\operatorname{sh} x}}$.

3. Построить графики функций

0 а) ④ $y=1-\dfrac{(x+2)^3}{x^2}$; б) ⑤ $y=\sqrt[3]{(x+1)^2(8x-4)}$.

4. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y=(x^2-6x)e^{6-2x}$$

2 а) ② в окрестности $x_0=0$ до $o(x^3)$;

4 б) ④ в окрестности $x_0=3$ до $o((x-3)^n)$;

5.④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, при этом

$$f(x)=\frac{|x|\operatorname{ctg} x}{1+2^{\frac{2}{2x-\pi}}} \text{ при } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\ x\neq\frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2;$$

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(\pi)=0.$$

1+0 6.④ Найти в точке $(2;-1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3+3x^2y+y^3+5=0$.

7.⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}-\sin\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2\cdot\ln^3\operatorname{ch} x$.

8.⑦ Построить кривую $x=t+\dfrac{1}{t},\quad y=2t+\dfrac{8}{t+1}$.

0 9.③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n>0$, $n=1,2,\dots$, если $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - о

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина **Математический анализ** **Курс** **1** **Семестр** **1** **2002/2003 уч.г.**

Фамилия студента Солдатов **№ группы** 266

Сумма баллов	$\Sigma = 25 + 1 = 26$	Оценка	хор.
Фамилия проверяющего А. Бесконечный		Фамилия экзаменатора	

1. Вычислить интегралы

(3) а) ③ $\displaystyle\int \frac{(\arccos \ln x)^2}{x}\,dx$; (4) б) ④ $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+\sin 2x}\,dx$.

5 **2.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x+x^2} - \ln(1+\sin x) - \cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{\operatorname{tg}(e^x-1) - \operatorname{sh} x - \frac{x^2}{2}}$.

3. Построить графики функций

(4) а) ④ $y = \dfrac{x^3}{2(x-2)^2}$; (5) б) ⑤ $y = \sqrt[3]{|x|(x+3)^2}$.

(–) **4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\sqrt{2 - 2x^2 + 4x}$$

(–) а) ② в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^3)$;

(–) б) ④ в окрестности $x_0 = 1$ до $o((x-1)^{2n+1})$;

5 **5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, при этом

$$f(x) = \frac{|x|(\pi^2 - x^2)}{\sin x} \text{ при } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right),\ x \neq k\pi,\ k = 0, \pm 1, 2;$$

$$f(0) = f(2\pi) = \pi^2, \quad f(\pi) = 2\pi^2, \quad f(-\pi) = -2\pi^2.$$

(3) **6.**④ Найти в точке $(1;1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^4 + y^4 - 2xy = 0$.

(–) **7.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to+0} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} - \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)\right)^{\frac{1}{x^3} + \ln^4 x}$.

(1) **8.**⑦ Построить кривую $x = \dfrac{(t+1)^3}{t^2}$, $y = \dfrac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$.

(0) **9.**③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 5$.

Заказ - Тираж - 300 МФТИ - а

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина $\boxed{\text{Математический анализ}}$ **Курс** $\boxed{1}$ **Семестр** $\boxed{1}$ **2002/2003 уч.г.**

Фамилия студента Мазур Юрий **№ группы** 264

Сумма баллов	31
Фамилия проверяющего	Бурмистров

Оценка	хор.
Фамилия экзаменатора	

1. Вычислить интегралы

3 а) ③ $\displaystyle\int \sin 2x \ln(1+\cos x)\,dx$; 4 б) ④ $\displaystyle\int \frac{x^5}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

---

5 **2.**⑤ Найти $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\sqrt{1+2x}}-\cos(x-x^2)-2x^2}{\arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

---

3. Построить графики функций

4 а) ④ $y=\dfrac{(x-1)^7}{x^6}$; 5 б) ⑤ $y=\sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2}$.

---

4. Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y=\left(\frac{x^2}{2}+2x-3\right)e^{-x^2-4x}$$

2 а) ② в окрестности $x_0=0$ до $o(x^2)$;

б) ④ в окрестности $x_0=-2$ до $o((x+2)^{2n+1})$;

5.④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $(-\pi,2\pi)$, при этом
$$f(x)=\frac{(\pi^2-4x^2)\operatorname{tg}x}{|x|} \text{ при } x\in(-\pi,2\pi),\ x\neq 0,\ x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k=0,\pm1;$$
$$f(0)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\pi^2,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=8,\quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-8.$$

---

4 **6.**④ Найти в точке $(-1;-1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3+y^3=1+3y^2x.$

7.⑤ Найти $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x+e^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\ln^2\operatorname{sh}x.$$

---

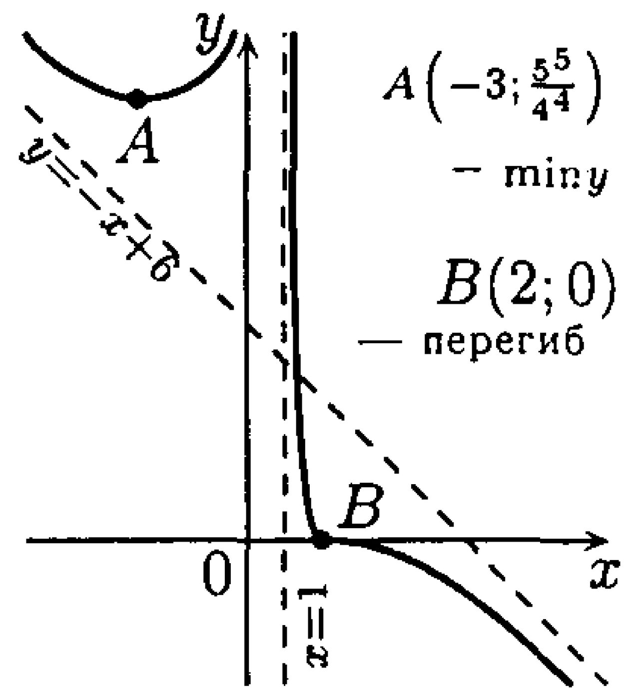
9 **8.**⑦ Построить кривую $x=\dfrac{t^2}{t^2-1},\quad y=t+1+\dfrac{1}{t+1}.$

9.③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n>0$, $n=1,2,\dots$, если $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2=4.$

1.

а) ③ $-\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{arcctg} e^{2x}+\frac{1}{4}\ln(1+e^{-4x})+C=$
$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{arcctg} e^{2x}+\frac{1}{4}\ln(1+e^{4x})-x+C$;

б) ④ $-\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2}\ln|\cos x|+\frac{1}{2}x+C$.



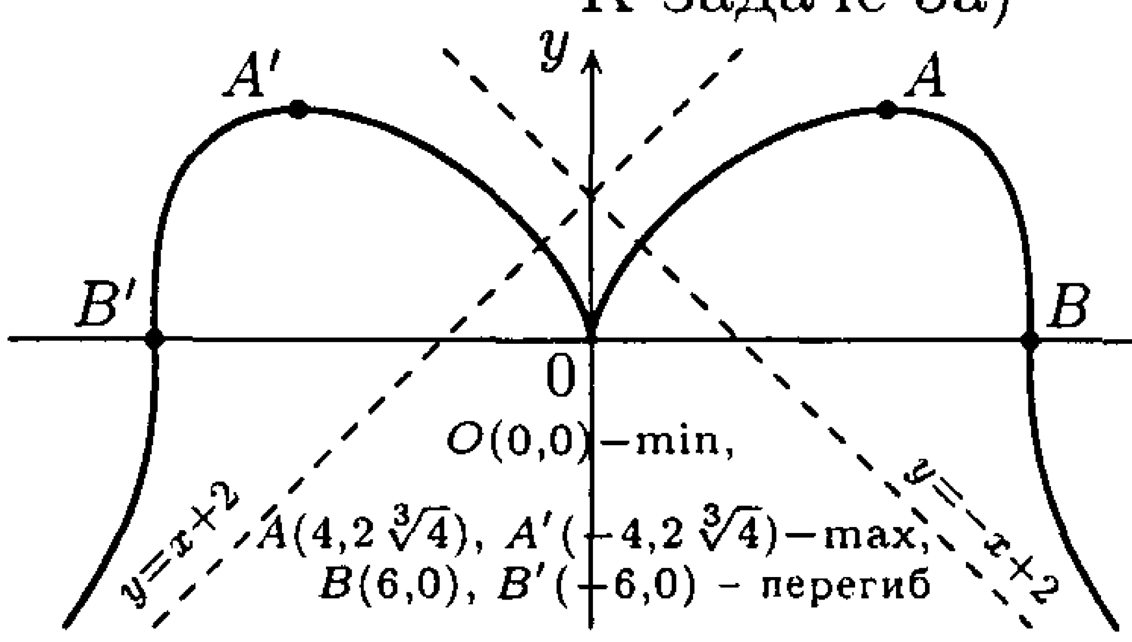
К задаче 3а)

2.⑤ $\boxed{-\frac{8}{3}.}$ $\cos(x\sqrt{1+x})=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$;

$e^{\operatorname{tg}x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$;

$\ln(1+x+x^2)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$;

числ. $=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$; знам. $=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$.



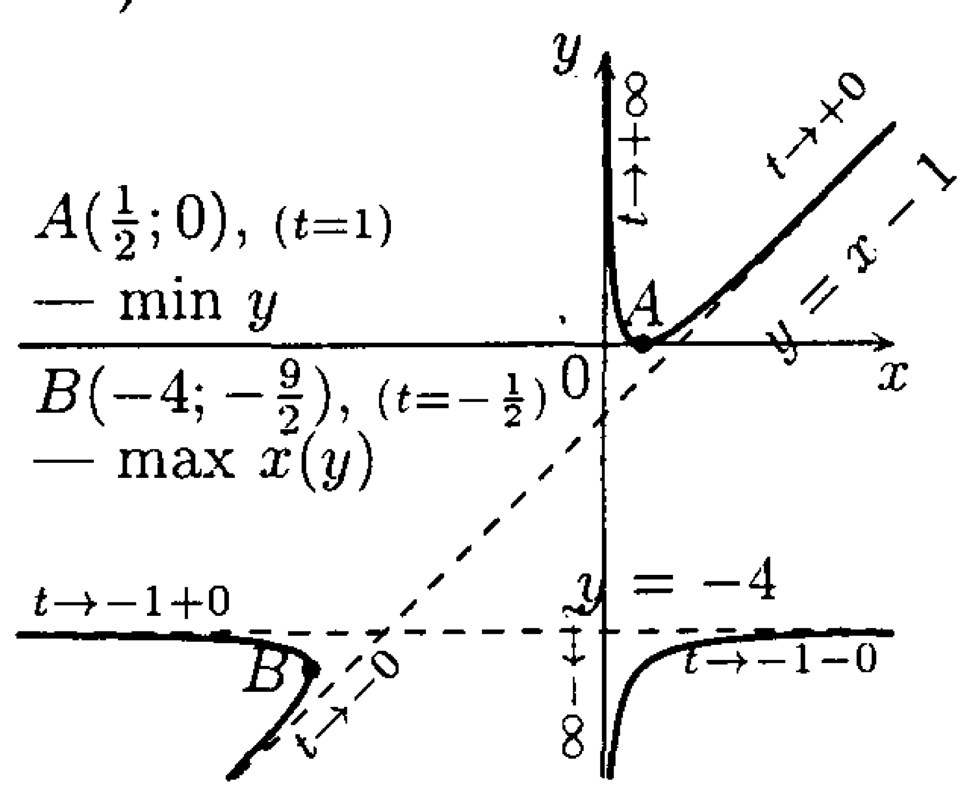
К задаче 3б)

3. а) ④ Асимптоты: $x=1$, $y=-x+6$,
график на рисунке; $y'=-\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}$, $y''=-20\frac{(x-2)^3}{(x-1)^6}$.

б) ⑤ Функция четная. Рассм. $x>0$. $y'=-\frac{x-4}{x^{1/3}(x-6)^{2/3}}$,
$y''=\frac{8}{x^{4/3}(x-6)^{5/3}}$; Асимптоты: $y=-x+2$ ($x\to+\infty$), $y=x+2$
($x\to-\infty$), график на рисунке.

4. а) ② $y=x-x^2-\frac{15}{8}x^3+o(x^3)$; б) ④ $y=-1+\frac{3}{8}(x+1)+$
$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{4^k}\left(\frac{16}{9}C_{1/2}^{k-2}-C_{1/2}^{k}\right)(x+1)^k+o((x+1)^n)$.

5.④ $x=\frac{\pi}{2}$ — точка разрыва 1-го рода, $x=\frac{3\pi}{2}$
— точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $(-\pi,2\pi)$ — точки непрерывности.



К задаче 8

6.④ $R=\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ($y'=1$, $y''=-\frac{6}{5}$).

7.⑤ $\boxed{e^{1/30}.}$ $e^{x\operatorname{ctg}x-1}=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{30}+o(x^4)$.

8.⑦ Асимптоты: $y=-4$ ($t\to-1\pm0$), $x=0$ ($t\to\pm\infty$), $y=x-1$ ($t\to\pm0$);
$x'_t=-\frac{2(t+1/2)}{(t+1)^2t^2}$, $y'_t=\frac{t^2-1}{t^2}$, $y'_x=-\frac{(t+1)^3(t-1)}{2(t+1/2)}$, $y''_{xx}=\frac{6t^4(t+1)^4}{(2t+1)^3}$, кривая на рисунке.

9.③ Расходится.

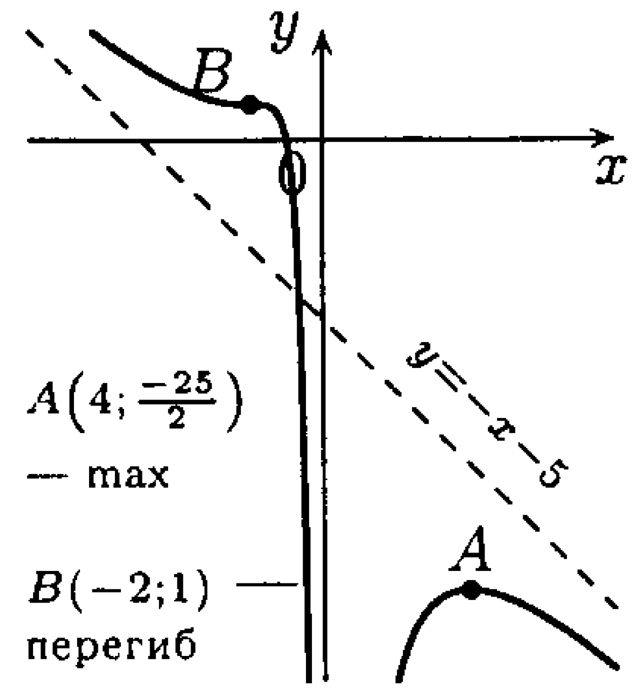
1. а) ③ $\sin x \cdot \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x + 2\,\mathrm{arctg}(\sin x) + C$;

б) ④ $\dfrac{2}{3(1-x^3)^{1/2}} + \dfrac{4}{3}(1-x^3)^{1/2} - \dfrac{2}{9}(1-x^3)^{3/2} + C$.

2.⑤ $\boxed{e^{7/4}\,.}$ $\sqrt[3]{1+3x-x^2} = 1 + x - \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{7}{3}x^3 + o(x^3)$.

3. а) ④

Асимптоты: $x=0$, $y=-x-5$, график на рисунке; $y' = -\dfrac{(x+2)^2(x-4)}{x^3}$, $y'' = \dfrac{-24(x+2)}{x^4}$.

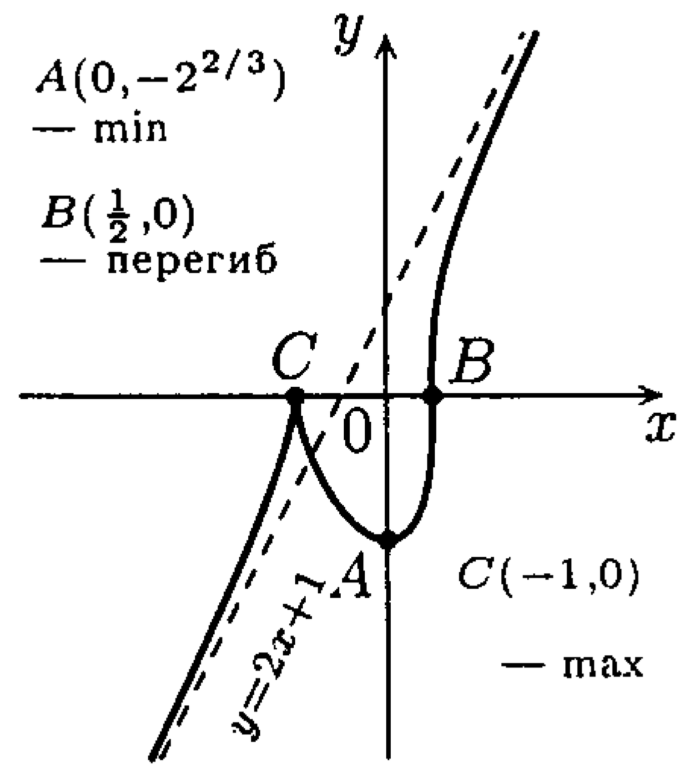


К задаче 3а)

б) ⑤ Асимптота:

$y = 2x+1$; $y' = \dfrac{2x}{(x+1)^{1/3}(x-1/2)^{2/3}}$,

$y'' \doteq -\dfrac{1}{(x+1)^{4/3}(x-1/2)^{5/3}}$, график на рисунке.



К задаче 3б)

4. а) ② $y = e^6(-6x+13x^2-14x^3) + o(x^3)$;

б) ④ $y = -9 + 18(x-3) +$

$+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k 2^k \left(\frac{1}{4(k-2)!} - \frac{9}{k!}\right)(x-3)^k + o((x-3)^n)$.

5.④ $x=0$ — точка разрыва 1-го рода, $x=\pi$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ — точки непрерывности.

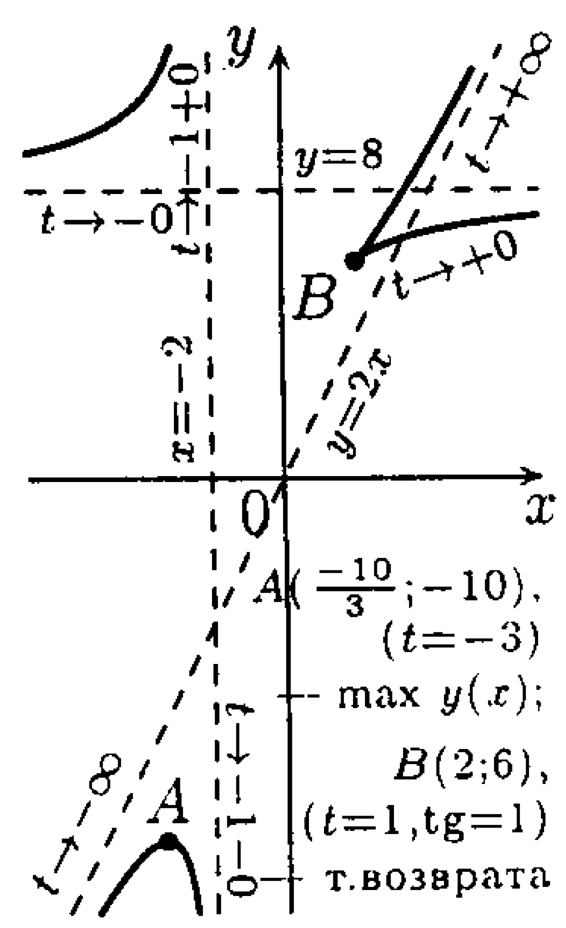
6.④

$R = \dfrac{5}{2}$ ($y'=0$, $y'' = -\dfrac{2}{5}$).

7.⑤ $\boxed{\dfrac{4}{9}\,.}$ $\sqrt{x+4} - \sqrt{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

8.⑦ Асимптоты: $y=8$ ($t \to \pm 0$), $x=-2$ ($t \to -1 \pm 0$), $y = 2x$ ($t \to \pm\infty$); $x'_t = \dfrac{t^2-1}{t^2}$, $y'_t = \dfrac{2(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$,

$y'_x = \dfrac{2(t+3)t^2}{(t+1)^3}$, $y''_{xx} = \dfrac{12t^3}{(t+1)^5(t-1)}$, кривая на рисунке.

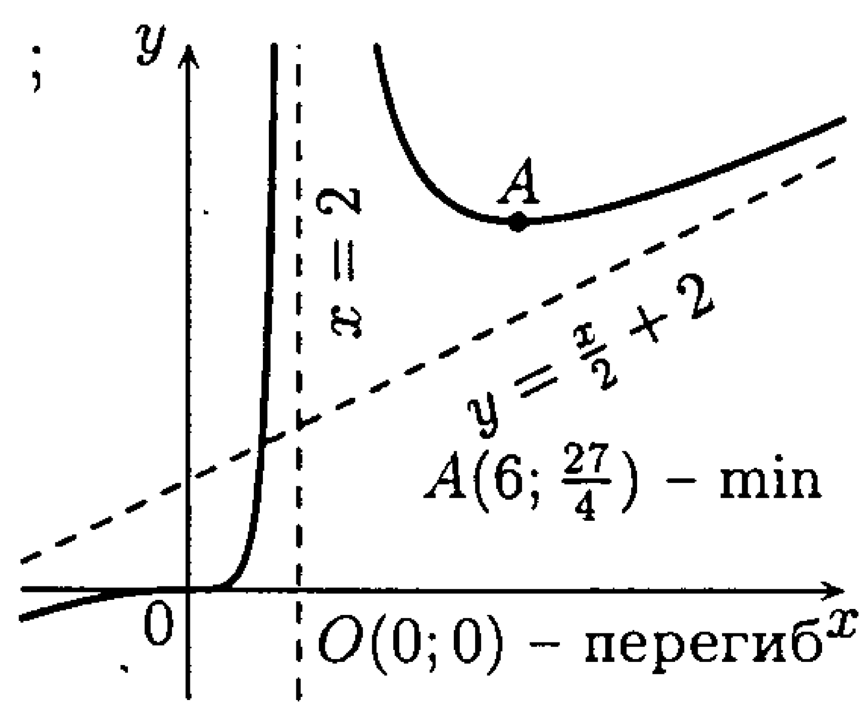


К задаче 8

9.③ Сходится.

1. а) ③ $\ln x(\arccos\ln x)^2 - 2\sqrt{1-\ln^2 x}\arccos\ln x - 2\ln x + C$;

б) ④ $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3\ln|1+\operatorname{tg} x| + C$.



К задаче 3а)

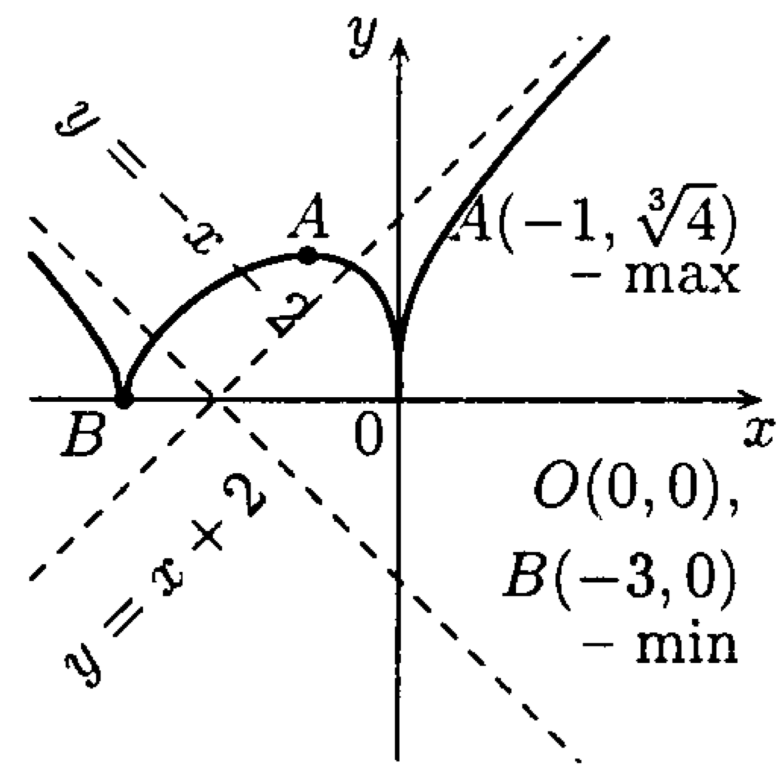
2.⑤ $\boxed{\frac{5}{2}.}$ $\sqrt[3]{1+3x+x^2} = 1 + x - \frac{2}{3}x^2 + x^3 + o(x^3)$,

$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$,

$\operatorname{tg}(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$; числ. $= \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$; знам. $= \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

---

3. а) ④
Асимптоты: $x = 2$, $y = \frac{x}{2} + 2$,
график на рисунке; $y' = \frac{x^2(x-6)}{2(x-2)^3}$, $y'' = \frac{12x}{(x-2)^4}$.
б) ⑤ Асимптоты: $y = x + 2$ ($x \to +\infty$),
$y = -x - 2$ ($x \to -\infty$); $y' = \frac{(x+1)\operatorname{sgn} x}{x^{2/3}(x+3)^{1/3}}$, $x \neq 0$;
$y'' = \frac{-2\operatorname{sgn} x}{x^{5/3}(x+3)^{4/3}}$, $x \neq 0$, график на рисунке.



К задаче 3б)

---

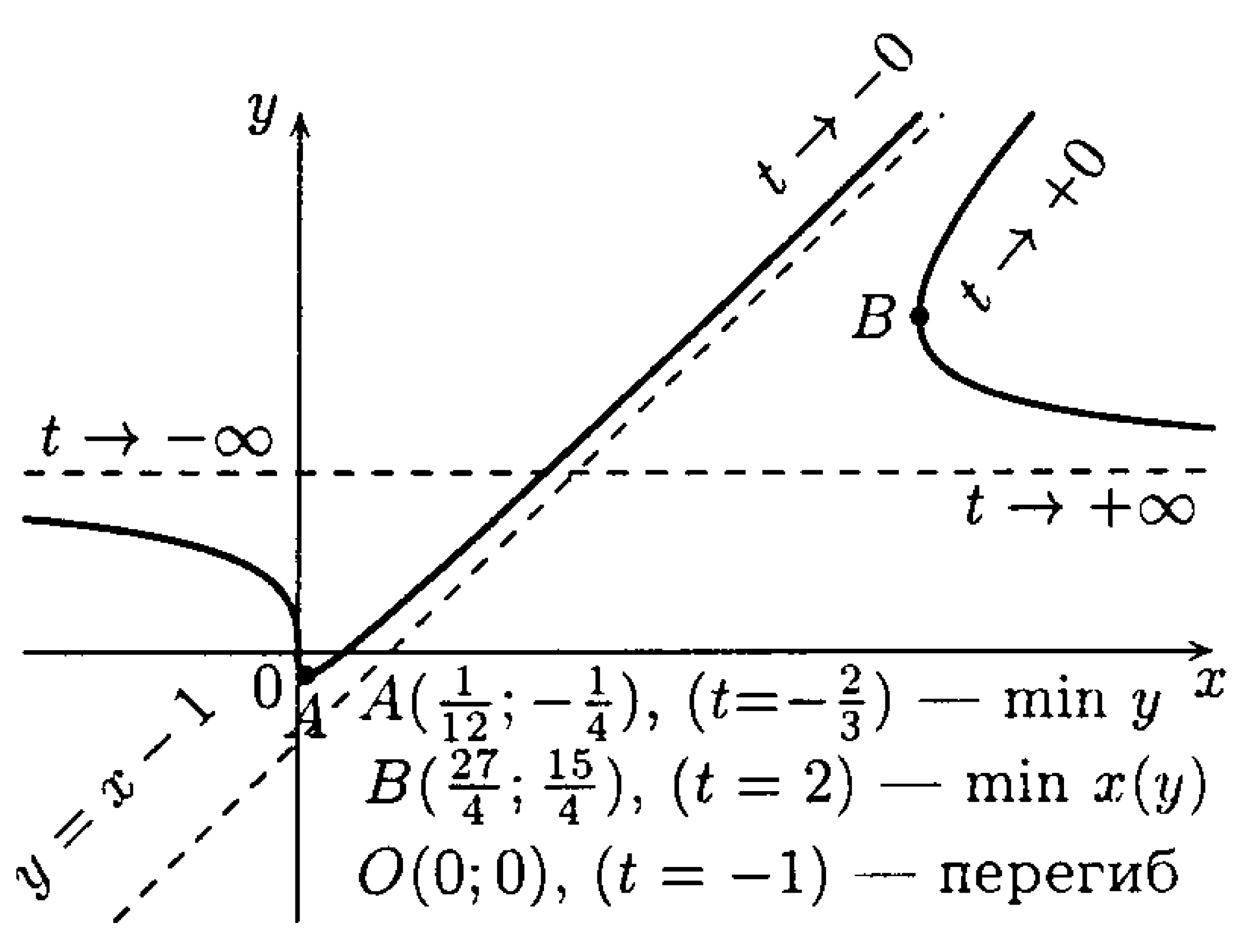
4. а) ② $y = \sqrt{2}\left(-x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3\right) + o(x^3)$; б) ④ $y = (t^2-1)\sqrt{1 - \frac{t^2}{2}}$, $t = x - 1$,

$y = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}(C_{1/2}^k + 2C_{1/2}^{k-1})(x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1})$.

5.④ $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода,
$x = 2\pi$ — точка разрыва
2-го рода; остальные точки интервала
$\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ — точки непрерывности.

6.④ $R = \frac{\sqrt{2}}{7}$ ($y' = -1$, $y'' = -14$).

7.⑤ $\boxed{e^{1/48}.}$ $\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.



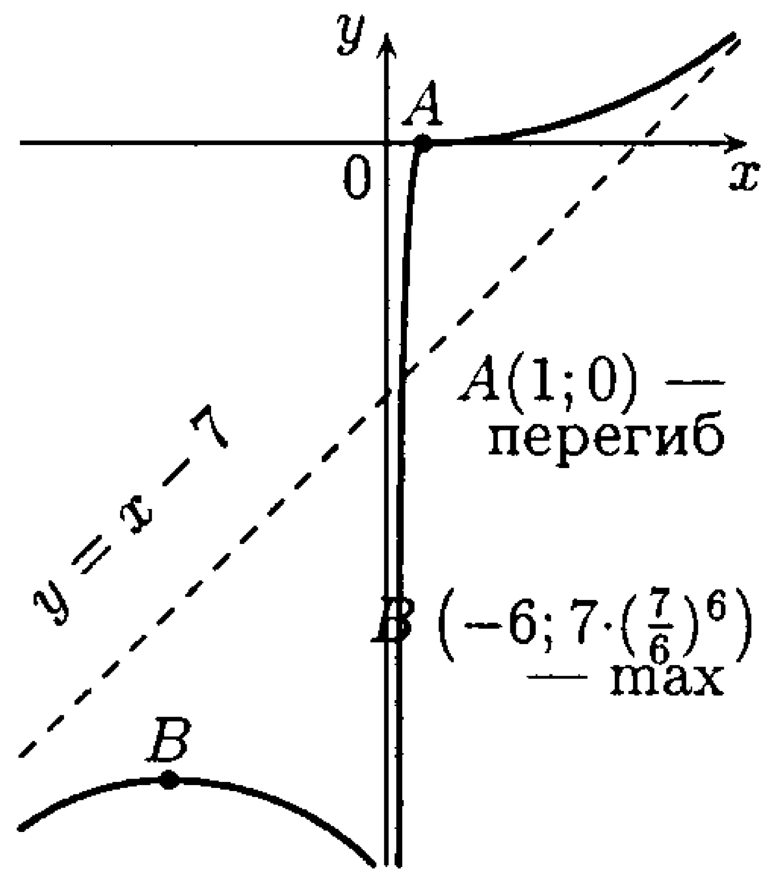
К задаче 8

8.⑦ Асимптоты: $y = 2$ ($t = \pm\infty$), $y = x - 1$ ($t \to \pm 0$); $x'_t = \frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$,

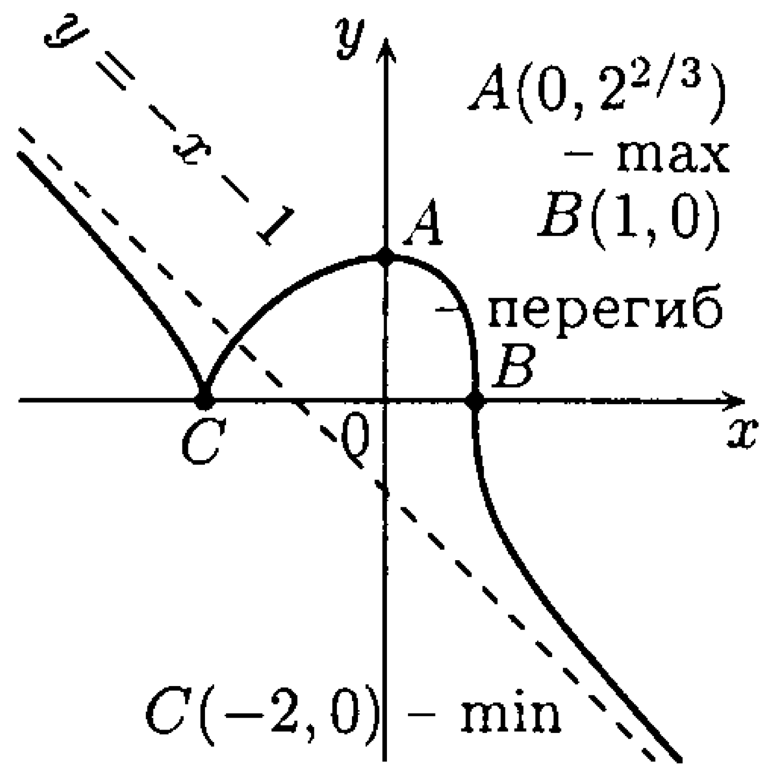
$y'_t = \frac{-3(t+2/3)}{t^3}$, $y'_x = -3\frac{t+2/3}{(t+1)^2(t-2)}$, $y''_{xx} = \frac{6t^5}{(t+1)^5(t-2)^3}$, кривая на рисунке.

9.③ Сходится.

Математический анализ, 1 курс, 1 семестр, 2002/2003 г. **Вариант (е)**



К задаче 3а)



К задаче 3б)

1. а) ③ $\sin^2 x\cdot\ln(1+\cos x)-\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x+C$;

б) ④ $\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}-2(1+x^2)^{1/2}-\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}+C$.

2.⑤ $\boxed{e^{-1/2}.}$ $e^{x\sqrt{1+2x}}=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$,

$\cos(x-x^2)=1-\frac{x^2}{2}+x^3+o(x^3)$.

---

3. а) ④ Асимптоты: $x=0$, $y=x-7$, график на рисунке; $y'=\frac{(x-1)^6(x+6)}{x^7}$, $y''=\frac{42(x-1)^5}{x^8}$.

б) ⑤ Асимптота:

$y=-x-1$ ($x\to\infty$); $y'=-\frac{x}{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}$,

$y''=\frac{2}{(x+2)^{4/3}(x-1)^{5/3}}$, график на рисунке.

---

4. а) ② $y=-3+14x-\frac{57x^2}{2}+o(x^2)$;

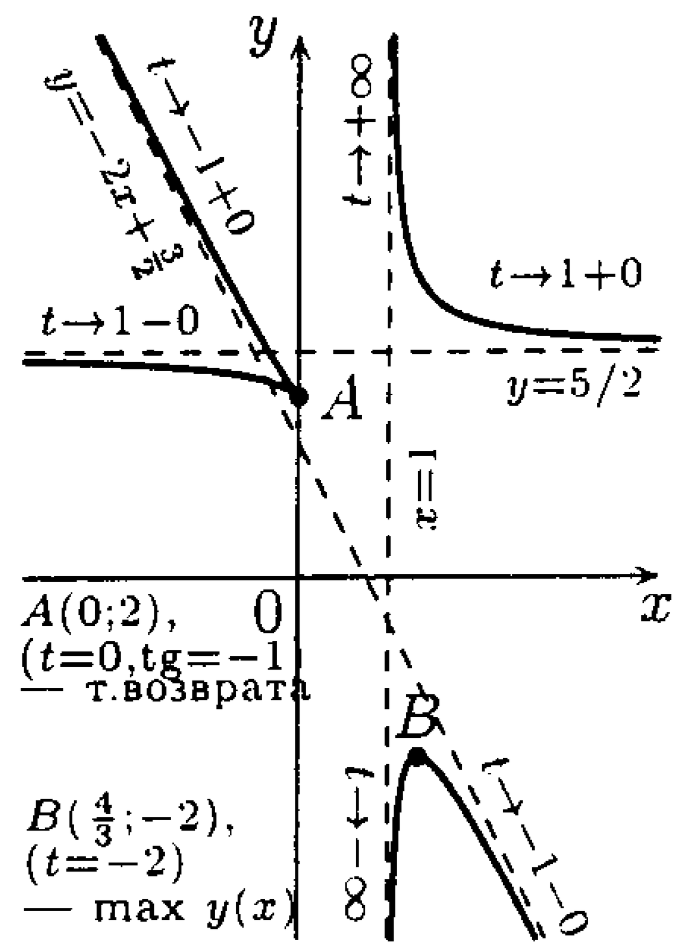
б) ④ $y=\left(\frac{t^2}{2}-5\right)\cdot e^{4-t^2}$, $t=x+2$,

$$y=-5e^4+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^4\left(\frac{5}{k!}+\frac{1}{(k-1)!2}\right)(x+2)^{2k}+o((x+2)^{2n+1}) .$$

5.④ $x=0$ — точка разрыва 1-го рода, $x=\frac{3\pi}{2}$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $(-\pi,2\pi)$ — точки непрерывности.

6.④ $R=\frac{1}{2}$ ($y'=0$, $y''=-2$).

7.⑤ $\boxed{-\frac{7}{6}.}$ $\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x=-1-\frac{1}{x}-\frac{5}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.



К задаче 8

8.⑦ Асимптоты: $y=\frac{5}{2}$ ($t\to 1\pm 0$),

$x=1$ ($t\to\pm\infty$), $y=-2x+\frac{3}{2}$ ($t\to -1\pm 0$);

$x'_t=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}$, $y'_t=\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$, $y'_x=-\frac{(t+2)(t-1)^2}{2}$,

$y''_{xx}=\frac{3}{4}\frac{(t+1)^3(t-1)^3}{t}$, кривая на рисунке.

9.③ Расходится.
