

На правах рукописи

СЫРЕСИН ДЕНИС ЕВГЕНЬЕВИЧ

**Разработка методов и алгоритмов вычисления
спектров радиально-неоднородных анизотропных
упругих цилиндрических волноводов**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре информатики Московского физико-технического института (государственного университета)

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор
Петров Игорь Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Даринский Александр Николаевич,
Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова
РАН, ведущий научный сотрудник

кандидат физико-математических наук, доцент
Подлипский Олег Константинович,
кафедра высшей математики Московского
физико-технического института
(государственного университета), доцент

Ведущая организация: Институт вычислительной математики и
математической геофизики Сибирского
отделения РАН (ИВМиМГ СО РАН)

Защита состоится “ ” декабря 2012 г. в часов на заседании
диссертационного совета Д 212.156.05 при Московском физико-техническом
институте (государственном университете) по адресу: 141700, Московская обл.,
г. Долгопрудный, Институтский пер., д.9., ауд. 903 КПМ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского физико-
технического института (государственного университета).

Автореферат разослан “ ” ноября 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Федько О. С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертационной работе предложено два независимых метода вычисления спектральных характеристик цилиндрических упругих радиально-неоднородных анизотропных волноводов. Их эффективность исследована на моделях, имеющих большое практическое значение для задач неразрушающего контроля материалов и акустического исследования скважин.

Актуальность темы. В связи с разработкой новых материалов и усложнением конструкций, изучаемых в задачах неразрушающего контроля, задачах акустической томографии поверхностей и скважинной акустики, возникает необходимость в анализе спектров широкого класса моделей анизотропных и неоднородных цилиндрических волноводов.

Так, при рассмотрении анизотропных волноводов существует класс моделей с азимутально-зависимым тензором модулей упругости материала. Примером такой модели служит модель скважины, ось которой наклонена относительно оси анизотропии трансверсально-изотропной породы. До настоящего времени вычисление спектра таких моделей осуществлялось методами численного трехмерного моделирования волновых полей или методами теории возмущений. Как правило, первый подход достаточно требователен к вычислительным мощностям, а второй – не всегда обеспечивает желаемую точность получаемых результатов. Альтернативой данным методам является предложенный в работе алгоритм вычисления собственных частот анизотропного волновода, основанный на применении спектрального метода для формулировки обобщенной задачи на собственные значения. Одним из преимуществ такого подхода является его меньшая требовательность к вычислительным ресурсам по сравнению с методами трехмерного моделирования, при сохранении необходимой точности вычисления спектра.

Главной сложностью при рассмотрении моделей волноводов с радиальной неоднородностью упругих свойств является отсутствие точных аналитических решений уравнений теории упругости. Учет такой неоднородности удобно проводить с помощью численных или полуаналитических методов. В данной

работе предложен алгоритм расчета спектра, основанный на применении метода матричного уравнения Риккати для матричных импедансов. Идея метода заключается в вычислении матриц импеданса на границах неоднородного слоя путем численного интегрирования уравнения Риккати. Подстановка вычисленных матриц в соответствующие граничные условия позволяет получить дисперсионное уравнение, корни которого вычислялись и классифицировались с помощью метода продолжения по параметру. В настоящей работе данный алгоритм применялся для вычисления спектра различных моделей радиально-неоднородных анизотропных волноводов.

Особенность формулировки разработанных алгоритмов позволяет рассматривать широкий класс моделей. Среди задач, в которых изучается влияние неоднородности и анизотропии среды на спектр волновода, можно выделить следующие: определение влияния неоднородной зоны нарушения в скважине на дисперсию нормальных мод; изучение спектра волноводов из композиционных материалов; определение пределов применимости современных методов обработки геофизических данных. Для задач акустической томографии и неразрушающего контроля интересным также представляется исследование дисперсии спиральных волн в цилиндрических волноводах. Другим примером модели волновода, изучаемой в данной диссертации, является модель цилиндрической полости с импедансной нагрузкой на ее поверхности.

Цели диссертационной работы.

1. Разработка новых полуаналитических методов и математических моделей, предназначенных для расчета спектра широкого класса анизотропных и радиально-неоднородных волноводов.
2. Разработка программных модулей и проведение численных экспериментов для исследования ряда проблем, имеющих важное значение для задач неразрушающего контроля и скважинной акустики.
3. Исследование влияния радиально-неоднородной зоны нарушения в скважине на спектр изгибной моды и разработка алгоритма восстановления упругих

параметров этой зоны по результатам измерения спектра. Определение влияния параметров матрицы импеданса поверхностной нагрузки на свойства квазирелеевских волн в цилиндрической полости.

Научная новизна.

- Предложен и реализован эффективный численный алгоритм вычисления дисперсионных кривых нормальных мод в цилиндрических волноводах с произвольным типом анизотропии среды. Данный метод основан на применении спектрального метода для формулировки обобщенной задачи на собственные значения.
- Предложен и реализован численный алгоритм вычисления спектра нормальных мод в радиально-неоднородных анизотропных волноводах, основанный на применении метода матричного уравнения Риккати.
- Для ряда моделей радиально-неоднородных анизотропных волноводов достоверность результатов, полученных с помощью предложенных алгоритмов, подтверждена путем их сравнения с данными, полученными другими численными методами.
- Показано, что для модели скважины с неоднородной зоной нарушения применение методов теории возмущений и матричного уравнения Риккати позволяет сформулировать алгоритм восстановления профиля скорости поперечной волны в породе.
- Аналитически решена задача о влиянии импедансной нагрузки на поверхности цилиндрической полости на дисперсионные свойства квазирелеевских волн. Исследована область параметров нагрузки и описаны условия для возбуждения или подавления таких волн.

Практическая ценность.

Быстродействие и приемлемая точность представленных математических методов и численных алгоритмов дает возможность их широкого применения в геофизических приложениях и для решения задач неразрушающего контроля цилиндрических конструкций. Разработанный комплекс программ применяется в исследовательском офисе компании “Шлюмберже” для исследования

волновых процессов в скважинах. Данная работа поддержана грантом Американского акустического общества для иностранных студентов и аспирантов номер RUX1-33047-XX-11.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Формулировка и программная реализация метода вычисления дисперсионных кривых и волновых полей в радиально-неоднородных анизотропных волноводах, основанного на применении матричного уравнения Риккати.
2. Разработка и реализация спектрального метода вычисления спектра цилиндрических волноводов с произвольным типом анизотропии среды.
3. Возможность применения представленных методов и алгоритмов для исследования влияния радиальной неоднородности и анизотропии среды на спектр нормальных мод широкого класса моделей волноводов.
4. Аналитическое решение задачи о влиянии параметров матрицы импеданса нагрузки на свойства квазирелеевской волны в цилиндрической полости.

Апробация.

Основные положения диссертации докладывались на: Седьмой международной научно-практической конференции “Геофизика 2009” (Санкт-Петербург, 2009); Международных конференциях “Days on Diffraction 2010” и “Days on Diffraction 2011” (Санкт-Петербург, 2010 и 2011); Международном конгрессе по ультразвуку ICU 2011 (Гданьск, Польша, 2011); Двадцать четвертой и двадцать пятой сессии Российского Акустического Общества (Саратов, 2011 и Таганрог, 2012); Девятнадцатом международном конгрессе по звуку и вибрациям ICSV19 (Вильнюс, Литва, 2012).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из которых четыре [1–4] – в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК РФ. В работах с соавторами **лично соискателем** были предложены формулировки математических моделей, методы и алгоритмы вычисления спектров радиально-неоднородных анизотропных цилиндрических волноводов, разработан соответствующий комплекс программ и проведены численные эксперименты.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка использованных источников, состоящего из 164 наименований. Текст диссертации содержит 158 страниц.

Содержание работы

Во введении приведено обоснование актуальности темы диссертационной работы, содержится постановка целей исследования, кратко изложены научная новизна и практическая значимость результатов.

В главе 1 приведен обзор публикаций, посвященных методам вычисления спектра анизотропных радиально-неоднородных цилиндрических волноводов и их приложениям в задачах акустического исследования скважин и неразрушающего контроля цилиндрических конструкций. В разделах 1.1 и 1.2 описаны основные методы вычисления спектра анизотропных неоднородных волноводов, обсуждаются условия применимости аналитических, полуаналитических и численных методов. В разделе 1.3 внимание уделяется некоторым вопросам вычисления и классификации корней дисперсионного уравнения, формулировке и решению задачи на собственные значения, и анализу экспериментальных данных методом Прони. В разделе 1.4. приводится обзор работ, посвященных применению описанных методов вычисления спектра на моделях, представляющих интерес для задач неразрушающего контроля и акустического исследования скважин. В третьей части раздела 1.4 приводится обсуждение вопроса о возможности возбуждения, распространения и измерения спиральных волн в цилиндрических волноводах.

В главе 2 описан алгоритм расчета спектра цилиндрических анизотропных радиально-неоднородных волноводов с помощью формализма матричного уравнения Риккати. В первом разделе обсуждаются вопросы формулировки дисперсионного уравнения с помощью матричного уравнения Риккати для изотропных волноводов, для которых упругие параметры Ламэ $\lambda(r)$, $\mu(r)$ и плотность $\rho(r)$ являются кусочно-непрерывными функциями координаты r . Решение управляющих уравнений можно представить в виде $g_n(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)}$, где

$g_n(r)$ соответствует радиальной части решения, а величины k , n – аксиальное и азимутальное волновые числа, и ω – круговая частота. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести понятие матричного импеданса среды $\mathbf{Z}(r)$, связывающего компоненты вектора нормальных напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz})$ и смещений $\bar{\mathbf{u}} = (u_r, u_\theta, u_z)$, как $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Z}(r)\bar{\mathbf{u}}$. Выражая из закона Гука вектор напряжений $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z})$ через вектора $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\bar{\mathbf{u}}$ и подставляя его в уравнение движения, можно прийти к системе матричных телеграфных уравнений

$$\partial_r \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{\Lambda} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрицы третьего порядка $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{Q} , \mathbf{S} и \mathbf{P} зависят от вида кусочно-непрерывных функций $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\rho(r)$ и величин k , n , ω . Подстановка матрицы $\mathbf{Z}(r)$ в уравнение (1) позволяет сформулировать матричное уравнение Риккати

$$d_r \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{Q} + \mathbf{S}\mathbf{Z} + \mathbf{P} = 0. \quad (2)$$

Оно описывает эволюцию матрицы $\mathbf{Z}(r)$ внутри радиально-неоднородного слоя. Если на границе слоя $r = r_0$ задано начальное условие в виде матрицы $\mathbf{Z}(r_0)$, то уравнение (2) позволяет рассчитать значение $\mathbf{Z}(r_1)$ на другой границе $r = r_1$. Матричные коэффициенты $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{Q} , \mathbf{S} и \mathbf{P} не зависят от радиальных производных функций $\lambda(r)$, $\mu(r)$ и $\rho(r)$, что позволяет не рассматривать условия сшивки матриц импеданса на границах между упругими слоями.

Наличие импедансной нагрузки к слою на границе $r = r_1$, характеризуемой матрицей импеданса $\mathbf{Z}_L(r_1)$, позволяет представить условие сшивки решений на этой границе в виде дисперсионного уравнения:

$$\det[\mathbf{Z}(r_1) - \mathbf{Z}_L(r_1)] = 0. \quad (3)$$

Его корни k_j , ν_j , ω_j являются спектром рассматриваемого волновода. Таким образом, для формулировки и решения уравнения (3) внутри неоднородного слоя необходимо задать граничные условия для слоя в виде матриц импеданса $\mathbf{Z}(r_0)$ и $\mathbf{Z}_L(r_1)$, зависящих от величин k , n , ω . В работе описан способ расчета матриц $\mathbf{Z}(r_0)$ и $\mathbf{Z}_L(r_1)$, соответствующих полости или стержню из однородного изотропного материала. Показано, что для незатухающих мод, эти матрицы являются эрмитовыми. Из этого условия и свойств матриц $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{Q} , \mathbf{S} и \mathbf{P} следует,

что решение уравнения (2) для незатухающих волн также соответствует эрмитовой матрице $\mathbf{Z}(r)$, что упрощает численное решение этого уравнения.

Во втором разделе главы 2 данный метод расширен на случай анизотропных волноводов, тензор модулей упругости $\mathbf{C}(r)$ которых является кусочно-непрерывной функцией координаты r . Независимость данного тензора от θ и z позволяет рассматривать решения вида $g_n(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)}$, соответствующие Фурье компонентам n и k . Нарушение этого условия приводит к невозможности разделения переменных в плоскости (r, θ) . Для любого азимутального и аксиального числа n и k управляющие уравнения имеют следующий вид:

$$-\rho\omega^2\mathbf{I}\bar{u} = \partial_r\hat{\sigma} + \hat{\mathbf{D}}(r, n, k)\hat{\sigma} + \tilde{\mathbf{D}}(r, n, k)\tilde{\sigma}, \quad (4.1)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{A}}_{\partial u}(r)\partial_r\bar{u} + \hat{\mathbf{A}}_u(r, n, k)\bar{u}, \quad (4.2)$$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{A}}_{\partial u}(r)\partial_r\bar{u} + \tilde{\mathbf{A}}_u(r, n, k)\bar{u}, \quad (4.3)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Входящие в уравнения (6) матрицы выражаются через компоненты тензора $\mathbf{C}(r)$ и числа n и k . Подстановка в них импеданса $\mathbf{Z}(r)$ приводит к уравнению Риккати, аналогичному (2), в котором матричные коэффициенты \mathbf{L} , \mathbf{Q} , \mathbf{S} и \mathbf{P} явно выражаются через матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{\partial u}$, $\hat{\mathbf{A}}_u$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\partial u}$, $\tilde{\mathbf{A}}_u$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\rho\omega^2\mathbf{I}$. Для вычисления матрицы импеданса $\mathbf{Z}(r)$ внутри рассматриваемого анизотропного слоя применяется тот же алгоритм, что и в предыдущем разделе.

В п.2.3 показано, что интегрирование уравнения Риккати (2) или анализ уравнения (3) усложняется из-за возможной сингулярности компонент матрицы $\mathbf{Z}(r)$. Для решения данной проблемы используется преобразования Кэли

$$\mathbf{K}(r) = (ia\mathbf{I} - \mathbf{Z}(r))(ia\mathbf{I} + \mathbf{Z}(r))^{-1}, \quad (5)$$

где величина a – некоторая размерная константа. Норма матрицы $\mathbf{K}(r)$ ограничена, если матрица $\mathbf{Z}(r)$ эрмитова. Преобразование (5) позволяет вычислять спектр волновода с помощью аналогов уравнений (2) и (3), сформулированных для матрицы $\mathbf{K}(r)$ и матриц граничных условий $\mathbf{K}(r_0)$ и $\mathbf{K}_L(r_1)$. В разделе 2.3 также представлены уравнения для расчета радиальной зависимости векторов $\bar{u}(r)$ и $\hat{\sigma}(r)$, следующие из уравнения (1). Данные вектора вычисляются путем подстановки в эти уравнения функции $\mathbf{Z}(r)$,

соответствующей корням уравнения (3), и формулировки начальных условий для вектора $\bar{u}(r_1)$ или $\hat{\sigma}(r_1)$.

В разделе 2.4 описан алгоритм вычисления спектра различных радиально-неоднородных волноводов. Для вычисления дисперсионной кривой, соответствующей исследуемой моде, был реализован метод продолжения по параметру. Для каждого значения n уравнение (3), зависящее от величин k и ω , можно представить как дифференциальное уравнение по параметру $\tau(k, \omega)$ – длины дуги дисперсионной кривой. Для заданных начальных значений k_0 и ω_0 , соответствующих моде, решение такого уравнения ищется путем его численного интегрирования по схеме предиктор-корректор с изменяемым шагом по τ .

В главе 3 представлено два метода вычисления дисперсионных кривых для анизотропных волноводов, тензор модулей упругости $\mathbf{C}(\theta)$ которых зависит от азимутального угла. Первый метод основан на модификации метода матричного уравнения Риккати, а второй на применении спектрального метода для численной дискретизации матричного дифференциального оператора и решения возникающей в результате обобщенной задачи на собственные значения.

В разделе 3.1 приводится формулировка метода матричного уравнения Риккати в средах с азимутальной, радиальной и аксиальной зависимостью тензора $\mathbf{C}(r, \theta, z)$ в цилиндрической системе координат. Для такого тензора рассматривается его разложение вида $\mathbf{C}(\bar{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}^{(m)}(r, k_0) e^{i(k_0 z + m\theta)}$. Аналогичным образом применяется разложение векторов $\bar{u}(\bar{r})$, $\hat{\sigma}(\bar{r})$ и $\tilde{\sigma}(\bar{r})$ по базисным функциям $\exp[i(kz + n\theta)]$. Оно приводит управляющие уравнения теории упругости к системе уравнений, бесконечной по гармоникам n и k :

$$-\rho\omega^2 \bar{u}^{(n)}(r, k) = \partial_r \hat{\sigma}^{(n)}(r, k) + \hat{\mathbf{D}}^{nn}(r, k) \hat{\sigma}^{(n)}(r, k) + \tilde{\mathbf{D}}^{nn}(r, k) \tilde{\sigma}^{(n)}(r, k), \quad (6.1)$$

$$\hat{\sigma}^{(n)}(r, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\hat{\mathbf{A}}_{\partial u}^{nm}(r, k, k_0) \partial_r \bar{u}^{(m)}(r, k_0) + \hat{\mathbf{A}}_u^{nm}(r, k, k_0) \bar{u}^{(m)}(r, k_0) \right), \quad (6.2)$$

$$\tilde{\sigma}^{(n)}(r, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{\partial u}^{nm}(r, k, k_0) \partial_r \bar{u}^{(m)}(r, k_0) + \tilde{\mathbf{A}}_u^{nm}(r, k, k_0) \bar{u}^{(m)}(r, k_0) \right). \quad (6.3)$$

Здесь вектора $\hat{\sigma}^{(n)}$, $\tilde{\sigma}^{(n)}$, $\bar{u}^{(n)}$ – радиально зависящая часть векторов \bar{u} , $\hat{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$, выписанных для азимутальной Фурье компоненты n . Явный вид матричных коэффициентов в уравнениях (6) предъявлен в тексте диссертации. Вид уравнений (6.2) и (6.3) не позволяет воспользоваться формулировкой

матричного уравнения Риккати (2) для отдельного азимутального и аксиального числа n и k . Для формулировки более общего метода ограничимся рассмотрением моделей волноводов, однородных вдоль их оси. Тогда, коэффициенты разложения тензора $\mathbf{C}(r, \theta)$, входящие в выражения для матриц $\hat{\mathbf{A}}_{\partial u}^{nm}(r, k, k_0)$, $\hat{\mathbf{A}}_u^{nm}(r, k, k_0)$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\partial u}^{nm}(r, k, k_0)$, $\tilde{\mathbf{A}}_u^{nm}(r, k, k_0)$, будут иметь вид $C_{ij}^{(n-m)}(r)\delta(k_0 - k)$. Это приводит к упрощению уравнений (6.2) и (6.3) и к возможности формулировки уравнения Риккати и вычисления спектра для каждого заданного волнового числа k . Путем алгебраических преобразований полученную систему уравнений, бесконечную по n , можно привести к виду телеграфного уравнения

$$\partial_r \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{\Lambda} \\ -\mathbf{P} & -\mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{S} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где вектора \bar{U} и \bar{S} образованы из векторов $\bar{u}^{(n)}(r)$ и $\hat{\sigma}^{(n)}(r)$ для всех гармоник n . Матрицы $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{Q} , \mathbf{S} и \mathbf{P} имеют блочную структуру, в которой каждый блок явно выражается через матрицы $\hat{\mathbf{A}}_{\partial u}$, $\hat{\mathbf{A}}_u$, $\tilde{\mathbf{A}}_{\partial u}$, $\tilde{\mathbf{A}}_u$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\rho\omega^2\mathbf{I}$. Для приближенного решения системы уравнений (7) предположим, что взаимное влияние двух гармоник n и m уменьшается с ростом числа $|n - m|$. Такое условие выполняется во множестве физических задач, например, при рассмотрении волноводов со слабой анизотропией среды. Если требуется вычисление спектра моды, максимальная энергия которой соответствует центральной гармонике с номером n^* , то при рассмотрении системы уравнений (7) можно ограничиться уравнениями для нескольких ближайшими к n^* гармоник с номерами n такими, что $|n \pm n^*| \leq M$, где M определяет число учитываемых гармоник, соседних к n^* . Введение матричного импеданса $\mathbf{Z}_{nm}(r)$, по формуле $\hat{\sigma}^{(n)}(r) = \mathbf{Z}_{nm}(r)\bar{u}^{(m)}(r)$, его подстановка в предварительно ограниченную систему уравнений (7), и ряд алгебраических преобразований, аналогичных описанным в главе 2, позволяют выписать матричное уравнение Риккати вида (1). Оно соответствует анизотропным волноводам, тензор модулей упругости \mathbf{C} которых зависит от r и θ . Для его решения и вычисления спектра можно воспользоваться алгоритмом, изложенными в главе 2. Однако большое

количество неизвестных в этом уравнении и сложность формулировки дисперсионного уравнения для отдельной гармоники n усложняет программную реализацию этого метода при больших значениях M .

Более предпочтительным оказывается применение метода, описанного в разделе 3.2, являющегося обобщением спектрального метода для анизотропных волноводов. Их спектр ищется путем решения обобщенной задачи на собственные значения, сформулированной согласно уравнениям (6) и граничным условиям. При описании спектрального метода будем считать, тензор модулей упругости \mathbf{C} зависит от координат r и θ . Здесь учитывается взаимное влияние решений с различными гармониками n , вызванное азимутальной зависимостью тензора \mathbf{C} . Путем подстановки уравнений (6.2) и (6.3) в уравнение (6.1), последнее можно привести к следующему виду:

$$-\rho\omega^2\bar{u}^{(n)}(r, k, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} L^{nm}(r, \partial_r, k)\bar{u}^{(n)}(r, k, \omega). \quad (8)$$

Здесь индекс n и m – номера гармоника, а матричный дифференциальный оператор $L^{nm}(r, \partial_r, k)$ выражается через матричные коэффициенты, входящие в уравнения (6) следующим образом

$$\mathbf{L} = \widehat{\mathbf{A}}_{\partial u} \partial_r^2 + (\widehat{\mathbf{D}}\widehat{\mathbf{A}}_{\partial u} + \widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{A}}_{\partial u} + \widehat{\mathbf{A}}_u + \{\partial_r \widehat{\mathbf{A}}_{\partial u}\}) \partial_r + \widehat{\mathbf{D}}\widehat{\mathbf{A}}_u + \widetilde{\mathbf{D}}\widetilde{\mathbf{A}}_u + \{\partial_r \widehat{\mathbf{A}}_u\} \quad (9)$$

Здесь для краткости записи у оператора \mathbf{L} и входящих в его выражение матриц не отмечена их зависимость от переменных n , m , k , r и ∂_r , а обозначение вида $\{\partial_r \widehat{\mathbf{A}}_{\partial u}\}$ подразумевает, что только матрица $\widehat{\mathbf{A}}_{\partial u}$ дифференцируется по r . Учет однородности среды по координате r позволяет сократить правую часть уравнения (9), используя условие $\partial_r \widetilde{\mathbf{A}}_{\partial u} = 0$. Из структуры оператора $L^{nm}(r, \partial_r, k)$ видно, что он представляет собой матричный полином второй степени по ∂_r . Для оптимизации алгоритма расчета матричный оператор также разделяется по степеням числа k вида

$$L^{mn}(r, \partial_r, k) = L_{(0)}^{mn}(r, \partial_r) + L_{(1)}^{mn}(r, \partial_r)k + L_{(2)}^{mn}(r)k^2 \quad (10)$$

Различные типы граничных условий, а также условий сшивки решений на границе двух слоев, следует представить в виде, аналогичном уравнению (9):

$$\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{B}^{mn}(r, \partial_r, k)\bar{u}^{(m)}(r, k, \omega) \right]_{r=r_{int}} = 0. \quad (11)$$

При рассмотрении невязких жидких сред для скалярного потенциала φ_n поля \bar{u}_n можно сформулировать следующее уравнение, аналогичное уравнению (8):

$$-\rho\omega^2\varphi^{(n)}(r, k, \omega) = \mathbf{L}^{nn}(r, \partial_r, k)\varphi^{(n)}(r, k, \omega). \quad (12)$$

Оператор \mathbf{L} – не что иное, как лапласиан с вычисленными производными по координатам θ и z , домноженный на модуль Юнга жидкости κ . Уравнения (8), (11), (12) образуют бесконечную систему дифференциальных уравнений для всех гармоник n . Как и в предыдущем разделе, данная система ограничивается рассмотрением нескольких гармоник вблизи центральной и проводится дискретизация матричных операторов в уравнениях (8), (12) с помощью разложения радиальных компонент вектора смещений $\bar{u}^{(n)}(r, k, \omega)$ по базису на основе полиномов Чебышева. Для численного расчета набор базисных функций ограничивался конечным числом полиномов, позволяющих с достаточной точностью аппроксимировать вектор $\bar{u}^{(n)}(r, k, \omega)$ в узлах полиномов. При дискретизации оператора \mathbf{L} показано, что уравнение (8) приводится к виду

$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u}. \quad (13)$$

Здесь матрица \mathbf{L} не зависит от ω , а вектор \mathbf{u} состоит из значений функции $u_i^n(r, k, \omega)$ в узлах сетки. Уравнения (11) для граничных условий и условий сшивки решений на границах слоев аналогичным образом приводятся к виду (13). Для подстановки этих условий строки оператора \mathbf{L} , вычисленные в узлах на границах, заменяются на соответствующие строки матрицы дискретизованного оператора \mathbf{B} . В результате, задача вычисления спектра волновода сводится к поиску значений ω^2 при решении обобщенной задачи на собственные значения

$$\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{u} = -\omega^2\mathbf{N}\mathbf{u}. \quad (14)$$

Эта задача является линейной при условии независимости матриц \mathbf{N} и $\tilde{\mathbf{L}}$ от частоты ω , что выполняется при рассмотрении недиссипативных сред и волноводов со свободными или жесткими границами.

Для классификации собственных значений производится отбор физически допустимых величин $\{\omega^2_j\}$ и их классификация по гармоникам n и номеру моды. Она осуществляется путем отбора таких значений $\{\omega^2_j\}$, для которых

энергия моды оказывается максимальной для искомой гармоники n . Номер моды при каждом n определяется сортировкой решений по скорости моды.

В главе 4 возможности методов и алгоритмов, представленных в главах 2 и 3, иллюстрируются путем вычисления спектра различных волноводов и их сравнения с результатами, полученными другими методами. Раздел 4.1 посвящен вычислению спектра изотропных волноводов методом матричного уравнения Риккати. Здесь, особое внимание уделяется вопросу расчета дисперсионных кривых спиральных волн. Поэтому для обозначения азимутального волнового числа, значение которого может быть нецелочисленное, вместо символа n используется символ ν . В п.4.1.1 предъявлены дисперсионные кривые однородной тонкостенной металлической оболочки со свободными границами. Вычисление спектра проводилось для нескольких первых мод и значений $\nu = 0, 0.5, 1.5$ и 2 . Показано, что для целых значений ν вычисленные дисперсионные кривые совпали с аналогичными, полученными аналитическими методами в работе Шина и Розе.

В п.4.1.2 данная модель оболочки дополнена радиальной зависимостью локальных значений продольной и поперечной скоростей $C_P(r)$ и $C_S(r)$ вида:

$$C_{P,S}(r) = \left(C_{P,S}^{(1)} - C_{P,S}^{(0)} \right) \left(\frac{r-r_0}{r_1-r_0} \right)^\alpha + C_{P,S}^{(0)}, \quad (15)$$

где $C_P^{(0)}$, $C_P^{(1)}$, $C_S^{(0)}$ и $C_S^{(1)}$ – значения скоростей соответствующих волн на границах r_0 и r_1 , а параметр α характеризует тип неоднородности. Результаты вычисления дисперсионных кривых первых двух мод при $\nu=2.4$ и различных значений α показан на Рис.1а. Наблюдается значительное влияние типа неоднородности (параметра α), особенно, в области высоких частот. Достоверность результатов подтверждена путем сравнения вычисленных кривых (случай $\alpha = 1$) с аналогичными, полученными методом матрицы перехода при аппроксимации неоднородного слоя десятью однородными слоями. Рис.1б иллюстрирует зависимость от параметра α и частоты $f = 2\pi\omega$ угла φ между направлением распространения второй моды и образующей цилиндра. Между кривыми, вычисленными при различных значениях α ,

наблюдается значительное расхождение в величине φ (до 0.2π). В данном подразделе также обсуждаются результаты расчета дисперсионных кривых при заполнении неоднородной оболочки жидкостью.

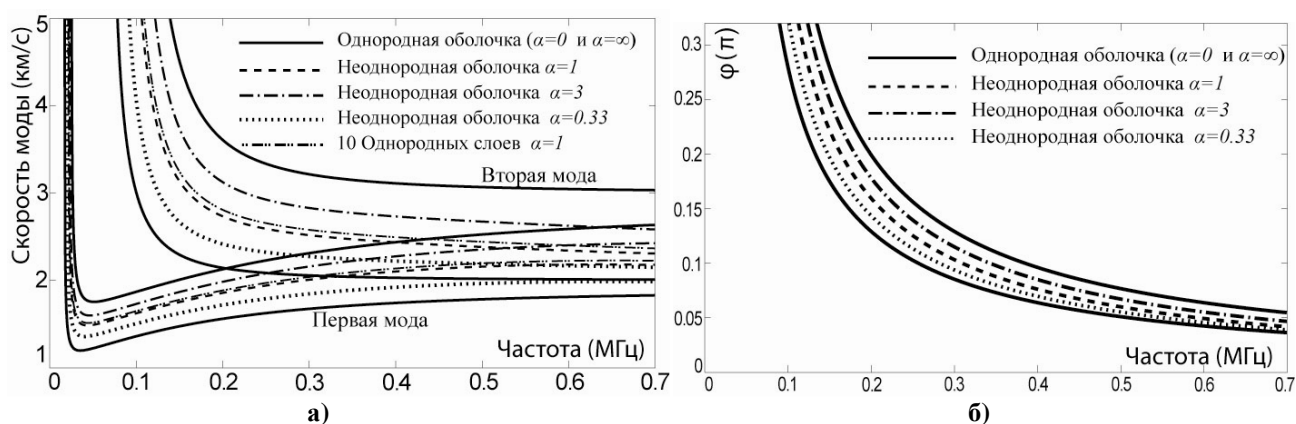


Рис.1 а) Дисперсионные кривые радиально-неоднородной оболочки. **б)** Зависимость угла распространения моды от частоты и типа неоднородности.

Подраздел 4.1.3 посвящен изучению влияния числа ν на спектр нормальных мод в многослойной модели обсаженной скважины. Показано, что при рассмотрении семейства мод с $\nu = 1, 1.5$ и 2 , дисперсионные кривые для нецелых значений $\nu = 1.5$ находятся между аналогичными кривыми для целых $\nu = 1$ и 2 . Наблюдались особенности в поведении вычисленных кривых, связанные с многослойностью волновода. Расположение данных особенностей зависит от значений числа ν .

В п.4.1.4 для модели скважины с неоднородной зоной нарушения проводится сравнение дисперсионных кривых, полученных методом матричного уравнения Риккати и методом матрицы перехода. Для последнего метода показано, что при увеличении числа однородных слоев, используемых при аппроксимации неоднородной среды, вычисленные дисперсионные кривые стремятся к кривым, найденным с помощью метода матричного уравнения Риккати.

Во втором разделе данной главы представлены результаты вычисления спектра моделей анизотропных волноводов с осесимметричным тензором модуля упругости $\mathbf{C}(r)$. В п.4.2.1 предъявлены дисперсионные кривые изгибной моды в скважинах в трансверсально-изотропных породах. Полученные кривые сравниваются с аналогичными кривыми, найденными с помощью эквивалентной

изотропной модели среды. Показано слабое влияние параметров Томсена γ и ϵ и сильное влияние δ на спектр и точность последнего метода.

В подразделе 4.2.2 описываются результаты вычисления дисперсионных кривых в модели композитной оболочки из волокнистого материала, ориентация волокон в котором зависит от координаты r . Расчет проводился для осесимметричных и круговых мод (Рис.2а и 2б соответственно). Рассмотрено три типа ориентации волокон, влияющих на вид тензора $\mathbf{C}(r)$: волокна ориентированы вдоль оси волновода (сплошные линии), волокна перпендикулярны оси (пунктирные линии), линейное изменение угла ориентации от параллельной на внутренней границе оболочки, до перпендикулярной на внешней (штрихпунктирные линии).

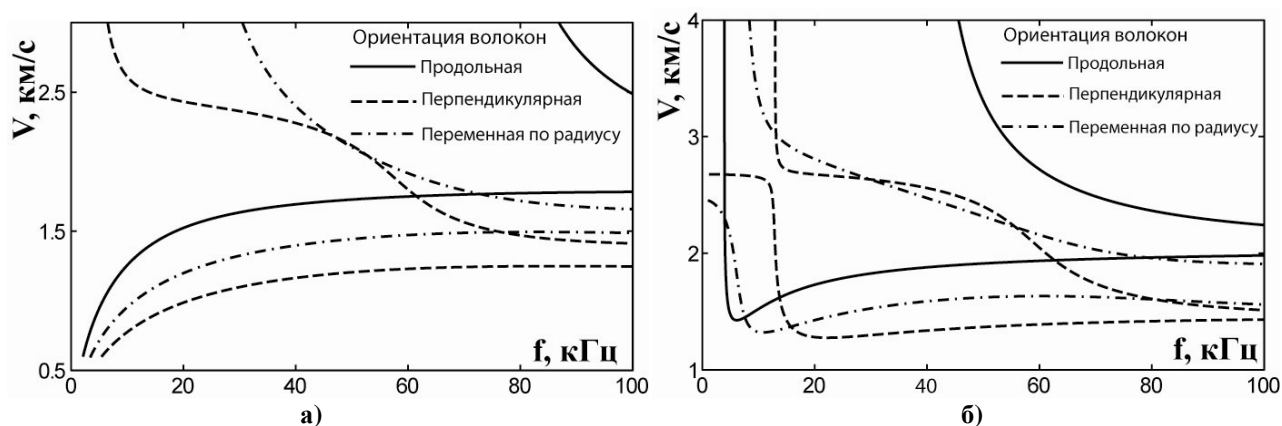


Рис.2 Дисперсионные кривые композитной оболочки. Левый (а) и правый (б) графики соответствуют случаям $k = 0, m = 0, 1$ и $n = 0, m = 0, 1$, соответственно.

Третий раздел главы 4 посвящен иллюстрации возможностей спектрального метода и метода матричного уравнения Риккати для вычисления дисперсионных кривых в скважинах в анизотропных породах. В подразделе 4.3.1 для обоих методов представлено сравнение результатов вычисления спектра моделей скважин в трансверсально-изотропных породах, ось анизотропии которых совпадает с осью скважины (ТIV анизотропия). Для моделей скважин в быстрой и медленной породе наблюдается совпадение результатов вычисления обоими методами. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим согласием вычисленных дисперсионных кривых с результатами анализа данных трехмерного численного моделирования (метод спектральных элементов).

В п.4.3.2 внимание уделялось применению спектрального метода и метода матричного уравнения Риккати для расчета дисперсионных кривых в моделях скважин, ось которых наклонена относительно оси анизотропии трансверсально-изотропной породы (ТІ анизотропия). К примеру, на рис. 3а) и б) приводится сравнение вычисленных дисперсионных кривых быстрой (пунктирная линия) и медленной (сплошная линия) изгибной дипольной моды с результатами расчета спектра с помощью численного моделирования (круги или треугольники) и эквивалентной изотропной модели (линия из точек). Дисперсионные кривые, изображенные на рис.3а), вычислены методом матричного уравнения Риккати для скважины в быстрой породе с осью анизотропии, перпендикулярной оси скважины (НТІ анизотропия). Кривые, показанные на рис.3б), вычислены спектральным методом для скважины в медленной породе, ось анизотропии которой наклонена на $\pi/4$ относительно оси скважины. В п.4.3.3 рассматривается многослойная модель обсаженной скважины в НТІ породе, где показано, что дисперсионные кривые, вычисленные с помощью спектрального метода, находятся в хорошем согласии со значениями спектра, полученными путем анализа данных численного моделирования.

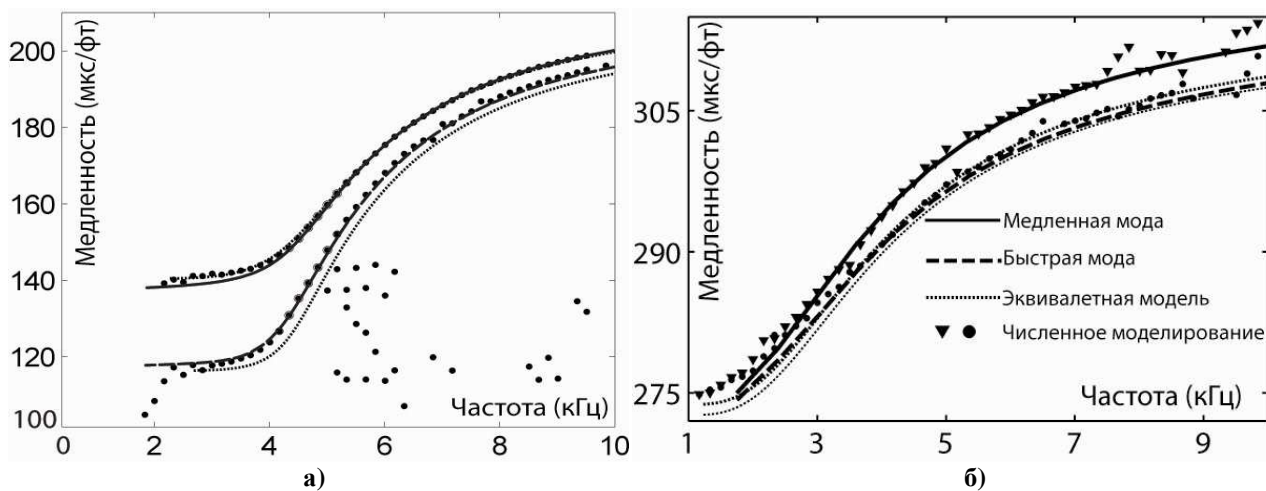


Рис.3 Дисперсионные кривые дипольных мод в скважине в породе с ТІ анизотропией. Левый (а) и правый (б) графики соответствуют модели быстрой и медленной породы.

Следующий раздел главы 4 посвящен исследованию влияния неоднородности зоны нарушения в скважине на спектр изгибной моды и методу восстановления профиля упругих параметров в такой зоне. Метод матричного уравнения Риккати позволяет определить влияние типа неоднородности на спектр

волновода. На Рис.4а) изображены дисперсионные кривые изгибной моды при различных значениях α (см. уравнение (15)), а на Рис.4б) показаны профили нормированной компоненты напряжения $\sigma_{rr}(r)$ (левый график) и нормированной функции Гамильтона колебаний $H(r)$ (правый график), вычисленные для изгибной моды в области низких частот. Наблюдается существенное влияние параметра α на спектр и на распределение полей и энергии вглубь скважины.

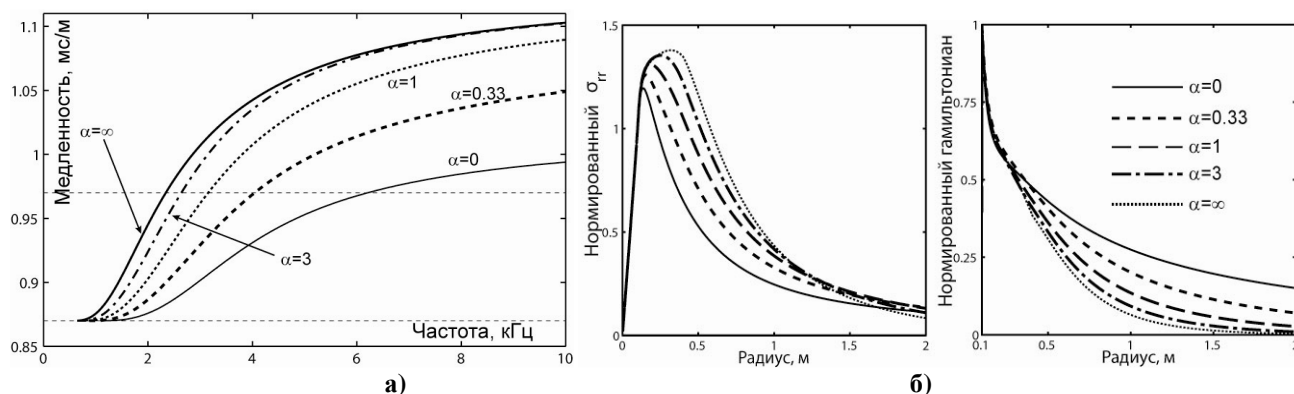


Рис.4 а) Дисперсионные кривые изгибной моды в неоднородных скважинах.
б) Нормированные профили $\sigma_{rr}(r)$ и $H(r)$.

Данная информация может быть использована для восстановления параметров неоднородности зоны нарушения. Показано, что применяя теорию возмущений к матричному уравнению Риккати, удается связать возмущения упругих параметров среды, определяющие ее неоднородность, со спектром рассматриваемой модели. Базируясь на данном подходе, был вычислен профиль медленности поперечной волны $S_S(r)$ в зоне нарушения. Показано, что относительная погрешность данного метода не превосходит 1% для большинства рассматриваемых моделей.

Глава 5 посвящена аналитическому решению задачи о влиянии поверхностной импедансной нагрузки на свойства осесимметричных квазирелеевских мод, распространяющихся вдоль границы цилиндрической полости. Применение импедансного метода позволяет сформулировать дисперсионное уравнение для таких мод, которое может быть представлено как равенство нулю детерминанта суммы матриц импеданса нагрузки и среды:

$$[X_{rr} + x_{rr}(\xi, \chi)][X_{zz} + x_{zz}(\xi, \chi)] = [X_{rz} + x_{rz}(\xi, \chi)]^2. \quad (16)$$

Здесь величины ξ и χ – безразмерная скорость и частота, а X_{ij} и x_{ij} – компоненты матриц импеданса нагрузки и полости. Анализ уравнения (16) позволяет исследовать влияние поверхностной нагрузки на поведение квазирелеевских мод и на их критические частоты. При условии $X_{rz} = 0$ уравнение (16) описывает гиперболы в пространстве (X_{rr}, X_{zz}) , положение которых зависит от величин ξ и χ . Анализ гипербол в данном пространстве показал, что для каждого фиксированного значения ξ (или χ) существуют области параметров нагрузки, при которых невозможно распространение квазирелеевских моды (область I на Рис.5а)), может существовать одна такая мода (область II) или возможно одновременное возбуждение двух мод (область III). В последнем случае анализ гипербол показал, что задание точки, через которую проходит дисперсионная кривая более быстрой моды, накладывает ограничение на спектр второй моды. В результате предложен такой подход к выбору параметров нагрузки, чтобы квазирелеевская волна обладала заданными дисперсионными свойствами.

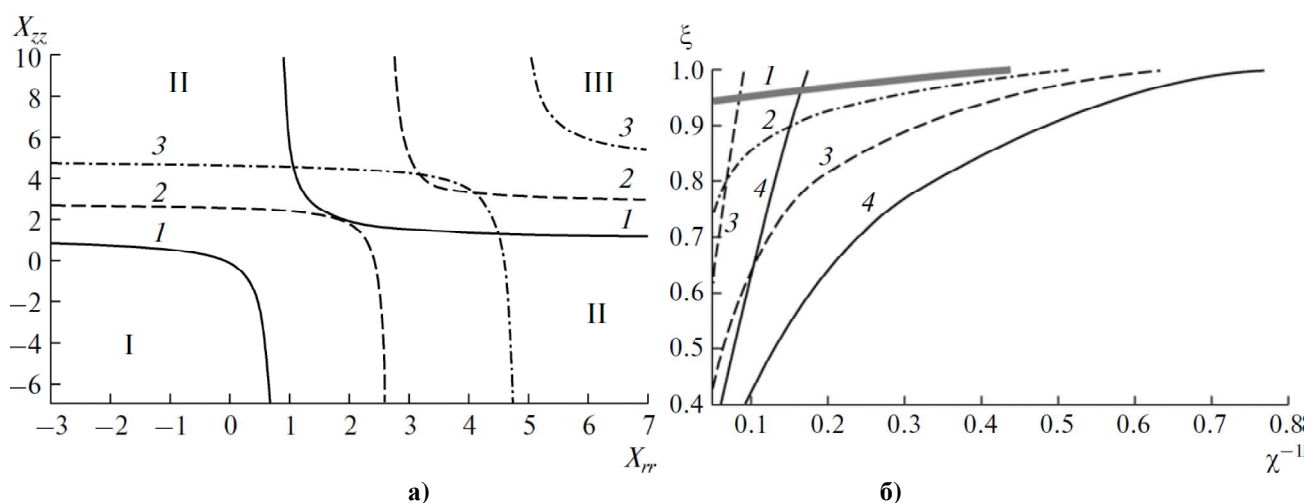


Рис.5 а) Гиперболы в плоскости (X_{rr}, X_{zz}) при $\chi' = 2.5$, и различных значениях ξ : (1): $\xi = 1$, (2): $\xi = \xi_c$ и (3): $\xi = 0.35$. **б)** Дисперсионные кривые квазирелеевских мод при наличии трещиноватого слоя. (1): $l/a = 0$, (2): $l/a = 0.05$, $g = 1$, (3): $l/a = 0.05$, $g = 3$ и (4): $l/a = 0.1$, $g = 3$.

Для иллюстрации полученных выводов в разделе 5.3 описаны результаты вычисления дисперсионных кривых квазирелеевских мод для модели нагрузки, соответствующей трещиноватому слою на поверхности полости. Матрица импеданса данной нагрузки пропорциональна величине gl/a , где l толщина

трещиноватого слоя, a – радиус полости, а $g = \rho^{(L)} / \rho$, где $\rho^{(L)}$ соответствует плотности слоя, а ρ – плотность среды полости. Дисперсионные кривые, вычисленные для заданной модели при различных значениях l и g , показаны на Рис.5б. Видно, что увеличение обоих параметров приводит к существенному искажению дисперсионной кривой квазирелеевской моды и возбуждению дополнительной моды.

В **заключении** приведены основные результаты работы. **Приложение** содержит вывод азимутальных Фурье-компонент тензора модулей упругости однородной произвольно-анизотропной среды.

Основные результаты диссертации

1. Предложено обобщение метода матричного уравнения Риккати на случай радиально-неоднородных анизотропных волноводов. Исследована возможность интегрирования данного уравнения без рассмотрения условий сшивки решений на границе раздела двух упругих сред. Предложена переформулировка уравнения Риккати с помощью преобразования Кэли. Показана возможность вычисления и классификации дисперсионных кривых методом продолжения по параметру. Предложен алгоритм восстановления профиля упругих параметров неоднородного слоя путем анализа спектра волновода.
2. Предложен алгоритм, основанный на применении спектрального метода, для вычисления спектра нормальных мод азимутально-неоднородных анизотропных волноводов. Разработан метод аппроксимации возникающей бесконечной системы дифференциальных уравнений второго порядка по азимутальным гармоникам и радиальным компонентам вектора смещений, приводящий к формулировке обобщенной задачи на собственные значения. Сформулирован численный алгоритм решения данной задачи.
3. Проведены численные эксперименты, в ходе которых обнаружены различные эффекты для мод цилиндрических упругих радиально-неоднородных анизотропных волноводов. Так, для моделей скважин в трансверсально-

изотропных породах показано, что выбранная аппроксимация решений по θ и r обеспечивает хорошее согласование дисперсионных кривых, вычисленных спектральным методом или методом матричного уравнения Риккати, с результатами вычисления спектра методом спектральных элементов. Для скважин с вертикальной осью анизотропии исследовано влияние параметров Томсена на дисперсионные свойства изгибной моды. При больших значениях параметра δ показано отклонение значений скорости дипольной моды в ее низкочастотной асимптотике от общепринятого значения. Также показано преимущество метода матричного уравнения Риккати перед методом матрицы перехода при вычислении спектра радиально-неоднородных волноводов. Обнаружено влияние радиальной неоднородности среды на спектр волновода при рассмотрении моделей скважин с неоднородной зоной нарушения и радиально-неоднородных оболочек из композитных материалов. Подтверждена возможность восстановления профиля скорости поперечных волн в скважинах с неоднородной зоной нарушения с ошибкой менее 1%.

4. Исследованы свойства квазирелеевских волн вблизи цилиндрической полости при наличии поверхностной импедансной нагрузки. Получено явное выражение для дисперсионного уравнения, описывающее гиперболы в плоскости параметров импедансной нагрузки. При различном выборе этих параметров показана возможность управления дисперсионными свойствами квазирелеевской волны, возможность ее подавления или возбуждения дополнительной моды волновода. Для тонкого трещиноватого слоя на поверхности полости показано влияние значений его плотности и толщины на дисперсию квазирелеевских мод.

Публикации автора по теме диссертации

1. Сыресин Д.Е., Жарников Т.В., Петров И.Б. Метод расчета дисперсионных кривых, волновых полей и упругих параметров среды в скважинах с радиально-неоднородной зоной нарушения // Труды МФТИ. 2012. Т. 4. №4. С. 167–179.

2. Syresin D.E., Zharnikov T.V., Tyutekin V.V. Dispersion properties of helical waves in radially inhomogeneous elastic media // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 131. №6. P. 4263–4271.
3. Tyutekin V.V., Syresin D.E., Zharnikov T.V. Effect of surface impedance load on properties of quasi-Rayleigh waves near cylindrical cavity // Acoustical Physics. 2010. V. 56. №4. P. 422–428.
4. Syresin D.E., Zharnikov T.V. An algorithm to calculate dispersion properties of helical waves in radially inhomogeneous elastic waveguides // AIP Conference Proceeding. 2012. V.1433. P. 451–454.
5. Сыресин Д.Е., Жарников Т.В. Влияние радиальной неоднородности упругих свойств на дисперсию собственных мод в анизотропных средах // Тез. Докл. XXV сессии российского акустического общества. Таганрог. 2012. С. 224–227.
6. Syresin D.E., Zharnikov T.V. The effect of elastic parameters of alteration zone on the dispersion properties of normal modes in borehole // Proc. 19th International congress on Sound and Vibration. Vilnius. 2012. R10-99, 8 p.
7. Zharnikov T.V., Syresin D.E. The Matrix Riccati equation approach to calculate dispersion curves for radially inhomogeneous waveguides with axially symmetric anisotropy // Proc. 19th International congress on Sound and Vibration. Vilnius. 2012. R36-93, 7 p.
8. Сыресин Д.Е., Жарников Т.В., Тютюкин В.В. Спиральные волны в радиально неоднородных цилиндрических упругих волноводах // Тез. Докл. XXIV сессии российского акустического общества. Саратов. 2011. С. 186–189.
9. Syresin D.E., Zharnikov T.V. Method of dispersion curves calculation for waves with noninteger azimuthal wavenumbers in radially inhomogeneous cylindrical elastic waveguides // Сборник тезисов. Days of Diffraction 2011. Санкт-Петербург. 2011. С. 93–94.
10. Syresin D.E., Zharnikov T.V., Tyutekin V.V. Properties of quasi-Rayleigh waves near cylindrical cavity subject to surface impedance load // Сборник тезисов. Days of Diffraction 2010. Санкт-Петербург. 2011. С. 79.
11. Сыресин Д.Е. К вопросу о возможности наблюдения поверхностных волн в цилиндрических волноводах // Материалы VII международной научно-практической конкурс-конференции “Геофизика 2009”. Санкт-Петербург, Октябрь 2009. СПб: Соло. 2010. С. 32–35.

СЫРЕСИН ДЕНИС ЕВГЕНЬЕВИЧ

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ
ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРОВ РАДИАЛЬНО-
НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 01.11.2012. Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,0
Тираж 100 экз. Заказ № 531

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования “Московский физико-
технический институт (государственный университет)”

Отдел оперативной полиграфии “Физтех-полиграф”
141700, Московской обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9