

На правах рукописи

Гасникова Евгения Владимировна

**Моделирование динамики макросистем на
основе концепции равновесия**

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре анализа систем и решений
Московского физико-технического института
(государственного университета)

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Меньшиков Иван Станиславович

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,
профессор
Бекларян Лёва Андреевич,
Центральный экономико-математический
институт РАН, главный научный сотрудник

кандидат физико-математических наук
Швецов Владимир Иванович,
Институт системного анализа РАН, ведущий
научный сотрудник

Ведущая организация: Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится декабря 2012 года в часов на заседании
диссертационного совета Д 212.156.05 при Московском физико-техническом
институте (государственном университете) по адресу: 141700, г. Долгопрудный
Московской обл., Институтский пер., д. 9, ауд. 903 КПМ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского физико-
технического института (государственного университета).

Автореферат разослан ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Федько О.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работы Е.Т. Джейнса, А. Дж. Вильсона, И. Пригожина, Г. Хакена положили начало традиции использования термодинамического формализма для анализа различных макросистем, встречающихся в экономике, биологии, социальной области и т.д. В России систематические исследования в этом направлении велись Л.Н. Розоноэром, а в последнее время В.П. Масловым, Ю.С. Попковым и другими исследователями. В большинстве работ рассматривались случаи стационарных макросистем, которые уже находятся в равновесии.

В диссертации предлагается в стационарных моделях учитывать динамику, с помощью которой можно оценивать скорость сходимости макросистемы к равновесию и исследовать зависимость равновесия от различных параметров. Вводимая динамика позволяет как более точно отражать специфику исследуемых задач, так и расширить множество моделируемых постановок.

Большой класс макросистем основывается на эволюционной динамике, приводящей к равновесию, которое может быть проинтерпретировано как равновесие Нэша. Возможность предложить и исследовать разумную динамику для той или иной стационарной макросистемы в ряде случаев позволяет также эффективно определить равновесие этой макросистемы.

Целью диссертационной работы является исследование равновесия макросистем, обладающих марковской динамикой, в основе которой лежат принципы стохастической химической кинетики.

Для этого решаются следующие задачи:

- отыскание достаточных условий существования и единственности равновесия;
- разработка эффективных вычислительных алгоритмов поиска равновесий макросистем путем сведения к задачам энтропийно-линейного программирования, разработка соответствующего комплекса программ;
- изучение наследования свойств динамической макросистемы при различных скейлингах (изменениях масштаба), в частности, исследование

перестановочности предельных переходов по времени и размерности макросистемы;

- изучение теоретико-игровых аспектов концепции равновесия динамических макросистем;
- оценки скорости сходимости к равновесию и плотности концентрации инвариантной меры в равновесии;
- анализ конкретных макросистем, рассматриваемых при математическом моделировании транспортных потоков; при ранжировании web-страниц; в экономических и социальных моделях.

Методы исследования. В работе используются: эргодические теоремы для марковских процессов, формула Стирлинга, метод Дарвина–Фаулера, современные варианты неравенства Чигера, понятие дискретной кривизны Риччи, второй метод Ляпунова, термодинамический формализм, аппарат производящих функций, метод внутренних штрафных функций, метод стохастического квазиградиентного спуска.

Научная новизна выносимых на защиту результатов состоит в том, что впервые:

- получено достаточное условие, отличное от известного ранее условия унитарности, обеспечивающее существование и единственность равновесия макросистемы, порожденной марковской динамикой, в основе которой лежат принципы стохастической химической кинетики;
- выявлен характер связи функции Ляпунова макросистемы с инвариантной мерой этой макросистемы;
- показано, что при достаточно естественных условиях время сходимости к равновесию оказывается малым;
- приведена эволюционная интерпретация конструкции равновесия Нэша–Вардропа, отвечающая равновесному распределению потоков на графе транспортной сети, до этого использовавшаяся только стационарно. Это позволило, в том числе, усилить парадокс Браесса (1968), а также объяснить эвристический способ отбора Бар-Гира–Швецова (2010) единственного

равновесия Нэша–Вардропа в случае, когда имеет место неединственность равновесий.

Практическая ценность работы. Диссертационная работа, в основном, носит теоретический характер, хотя во многом мотивированна конкретными приложениями.

В диссертации в рамках макросистемного подхода предложена модель, обобщающая известную на практике энтропийную модель расчета матриц корреспонденций. Эта известная модель была использована для анализа данных по транспортным потокам г. Москвы. Предложенная в диссертации модель позволила более адекватно описать имеющиеся данные. Сейчас предложенная модель тестируется в Научно-исследовательском и проектном институте Генерального плана города Москвы, как структурный блок общей четырехстадийной транспортной модели.

Диссертация выполнялась при поддержке Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, МФТИ, грант правительства РФ договор 11G34.31.0073, а также при поддержке грантов РФФИ 11-01-00494-а, мол_а_вед 12-01-33007.

Апробация и публикации. По материалам диссертации опубликовано 30 печатных работ, в том числе, три – в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [6, 12, 13].

Личный вклад соискателя в работы с соавторами состоит в доказательстве теорем о сходимости динамических макросистем к равновесию; исследовании ряда свойств равновесий макросистем (скорость сходимости, плотность концентрации инвариантной меры); исследовании макросистем, имеющих практическую ценность; систематизации ранее известных алгоритмов; разработке численных алгоритмов; разработке соответствующего комплекса программ.

Результаты работы докладывались, обсуждались и получили одобрение специалистов на 16 конференциях (в том числе, пяти международных), научных семинарах по экспериментальной экономике Вычислительного центра РАН (2009-2012), семинаре-конференции РАН под рук. акад. В.В. Козлова (2010), на

семинарах кафедр математических основ управления и анализа систем и решений ФУПМ МФТИ (2009-2011), на семинарах по транспортным потокам в Независимом Московском Университете (2011-2012).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка использованных источников, включающего 135 наименований. Общий объём работы составляет 90 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении сформулированы цели работы, обосновывается её актуальность, дан обзор работ, связанных с темой диссертации, приводятся основные результаты и их предпосылки.

В первой главе подробно рассматривается используемое в диссертации понятие равновесия макросистемы, приводятся известные теоремы о концепции равновесия макросистемы, даются их обобщения, приводятся ряд примеров.

В начале главы разбираются задачи, имеющие прикладное значение. Приведем одну из них.

Задача 1. Обобщение энтропийной модели А.Дж. Вильсона расчета матрицы корреспонденций.

Пусть в некотором городе имеется n районов, $L_i > 0$ – число жителей i -го района, $W_j > 0$ – число работающих в j -м районе. При этом $M = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{j=1}^n W_j$, – общее число жителей города. Обозначим через $x_{ij}(t) \geq 0$ – число жителей, живущих в i -м районе и работающих в j -м в момент времени t . Со временем жители могут только меняться квартирами, поэтому во все моменты времени t

$$x_{ij}(t) \geq 0, \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \equiv L_i, \sum_{i=1}^n x_{ij}(t) \equiv W_j, i, j = 1, \dots, n, 1 \ll n^2 \ll M. \quad (\mathbf{A})$$

Опишем имеющиеся стимулы к обмену. С одной стороны, работать далеко от дома плохо из-за транспортных издержек, но с другой, люди все-таки ездят на работу далеко. Это можно объяснить тем, что близко от дома не удастся найти

хорошую работу. Будем считать, что компромисс между этими двумя неприятностями описывается эффективной функцией затрат $R(l) = (\alpha l^\beta - \omega \ln l)/2$, где $l > 0$ – расстояние от дома до работы, а $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ – настраиваемые параметры модели.

Теперь опишем саму динамику. Пусть в момент времени $t \geq 0$ r -й житель живет в k -м районе и работает в m -м, а s -й житель живет в p -м районе и работает в q -м. Тогда $\lambda_{k,m;p,q}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ – есть вероятность того, что жители с номерами r и s ($1 \leq r < s \leq M$) поменяются квартирами в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Вероятность обмена местами жительства зависит только от мест проживания и работы обменивающихся:

$$\lambda_{k,m;p,q}(t) \equiv \lambda_{k,m;p,q} = \lambda M^{-1} \exp\left(\underbrace{R(l_{km}) + R(l_{pq})}_{\text{суммарные затраты до обмена}} - \underbrace{(R(l_{pm}) + R(l_{kq}))}_{\text{суммарные затраты после обмена}} \right) > 0,$$

где коэффициент $\lambda > 0$ характеризует интенсивность обменов.

Согласно эргодической теореме для марковских цепей:

$$\begin{aligned} \forall \{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n,n} \in (\mathbf{A}) \lim_{t \rightarrow \infty} P(x_{ij}(t) = x_{ij}, i, j = 1, \dots, n) = \\ = Z^{-1} \prod_{i=1, j=1}^{n,n} \exp\left((\omega \ln l_{ij} - \alpha \cdot (l_{ij})^\beta) x_{ij} \right) \cdot (x_{ij}!)^{-1} \stackrel{def}{=} p\left(\{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n,n} \right), \end{aligned}$$

где статсумма Z находится из условия нормировки получившейся “пуассоновской” вероятностной меры. Отметим, что стационарное распределение $p\left(\{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n,n} \right)$ удовлетворяет условию детального равновесия:

$$\begin{aligned} (x_{km} + 1)(x_{pq} + 1) p\left(\{x_{11}, \dots, x_{km} + 1, \dots, x_{pq} + 1, \dots, x_{pm} - 1, \dots, x_{kq} - 1, \dots, x_{nn}\} \right) \lambda_{k,m;p,q} = \\ = x_{pm} x_{kq} p\left(\{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n,n} \right) \lambda_{p,m;k,q}. \end{aligned}$$

При $M \gg 1$ распределение $p\left(\{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n,n} \right)$ сконцентрировано на множестве (\mathbf{A}) в окрестности наиболее вероятного значения $\{x_{ij}^*\}_{i=1, j=1}^{n,n}$, которое находится, как решение задачи энтропийно-линейного программирования (см. теорему 1 ниже):

$$-\ln p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right) \sim \sum_{i=1, j=1}^{n, n} x_{ij} \ln(x_{ij}/e) + \sum_{i=1, j=1}^{n, n} \left(\alpha \cdot (l_{ij})^\beta - \omega \ln l_{ij}\right) x_{ij} \rightarrow \min_{\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n} \in (A)}.$$

Решение этой задачи можно представить как

$$x_{ij} = \exp\left(\lambda_i^L + \lambda_j^W + \omega \ln l_{ij} - \alpha \cdot (l_{ij})^\beta\right),$$

где множители Лагранжа (двойственные переменные) $\{\lambda_i^L\}_{i=1}^n$ и $\{\lambda_j^W\}_{j=1}^n$ определяются из равенств системы (A). На практике мы имеем информацию о $\{L_i, W_i\}_{i=1}^n$ и $\{l_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, n}$. Из системы ограничений (A), мы найдем

$$\left\{x_{km} \left(\{L_i, W_i\}_{i=1}^n; \{l_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)\right\}_{k=1, m=1}^{n, n}.$$

Такой способ расчета матрицы корреспонденций с $\omega=0$ в литературе часто называют (энтропийной) *гравитационной моделью*:

$$x_{ij} = A_i B_j L_i W_j (l_{ij})^\omega \exp\left(-\alpha \cdot (l_{ij})^\beta\right),$$

где $\{A_i\}_{i=1}^n$ и $\{B_j\}_{j=1}^n$ определяются из соотношений:

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^n B_j W_j (l_{ij})^\omega \exp\left(-\alpha \cdot (l_{ij})^\beta\right)\right)^{-1}, \quad B_j = \left(\sum_{i=1}^n A_i L_i (l_{ij})^\omega \exp\left(-\alpha \cdot (l_{ij})^\beta\right)\right)^{-1}.$$

В классической статической энтропийной модели (второй половины 60-ых годов XX века) А.Дж. Вильсона $\omega=0$. Однако по Москве наблюдается заметно лучшее соответствие реальных данных рассматриваемой модели, если допустить $\omega > 0$, и оптимально его подбирать.

Приведем теперь оценку концентрации стационарного распределения $p\left(\left\{x_{ij}\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}\right)$ в окрестности наиболее вероятного значения $\left\{x_{ij}^*\right\}_{i=1, j=1}^{n, n}$. Для этого, предварительно, введем такую перестановку $ij(\cdot)$, что $x_{ij(1)}^* \geq x_{ij(2)}^* \geq \dots \geq x_{ij(n^2)}^*$, а затем введем обозначение $n_k(t) = x_{ij(k)}(t)$, $k=1, \dots, n^2$.

Утверждение. $\forall q=0, \dots, n^2 \exists \lambda_q > 0, T_{q,n} = O(M \ln M): \forall t \geq T_{q,n}$

$$P\left(\left|\frac{n_k(t)}{x_{ij(k)}^*} - 1\right| \leq \frac{\lambda_q n}{\sqrt{M}}, k = 1, \dots, q\right) \geq 0.99.$$

Рассмотрим теперь общий подход, частным случаем которого является изложенная выше модель.

Предположим, что некоторая макросистема может находиться в различных состояниях, характеризуемых вектором \vec{n} с неотрицательными целочисленными компонентами. Будем считать, что в системе происходят случайные превращения (химические реакции). Пусть $\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J$ – все возможные типы реакций (конечный набор). Введем, следуя М.А. Леонтовичу (1935), интенсивность реакции:

$$\lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n}) = \lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = M^{1 - \sum_i \alpha_i} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_{i: \alpha_i > 0} n_i \cdot \dots \cdot (n_i - \alpha_i + 1),$$

где $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \geq 0$ – константа реакции (в общем случае $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n})$ – функция, см. например, теорему 2). При этом часто считают $\sum_i n_i(t) \equiv M$. Таким образом $\lambda_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}(\vec{n})$ – вероятность осуществления в единицу времени перехода $\vec{n} \rightarrow \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. На макроуровне все это соответствует принципам химической кинетики (закон действующих масс Гульдберга–Вааге, 1864).

Определение. Условием унитарности (условием Штюкельберга–Батищевой–Пирогова) называется следующее соотношение:

$$\exists \vec{\xi} > \vec{0}: \forall \vec{\alpha} \rightarrow \sum_{\vec{\beta}: (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = \sum_{\vec{\beta}: (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J} K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j}. \quad (\text{ШБП})$$

Следующая теорема уточняет результаты а) В.В. Веденяпина (1999), б) В.А. Малышева, С.А. Пирогова, А.Н. Рыбко (2004).

Теорема 1. а) $\langle \vec{\mu}, \vec{n}(t) \rangle \equiv \langle \vec{\mu}, \vec{n}(0) \rangle$ (inv)

тогда и только тогда, когда вектор $\vec{\mu}$ ортогонален каждому вектору семейства $\{\vec{\alpha} - \vec{\beta}\}_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J}$.

б) Пусть выполняется условие (ШБП). Тогда

1. мера $\nu(\vec{n}) = \prod_i \lambda_i^{n_i} e^{-\lambda_i} / n_i!$, где $\lambda_i = \xi_i^* M$, а $\vec{\xi}^*$ – произвольное решение (ШБП), будет инвариантной относительно предложенной стохастической марковской динамики.

2. на множестве (inv) эта мера экспоненциально быстро концентрируется, с ростом M , в окрестности наиболее вероятного состояния, которое и принимается за положение равновесия макросистемы.

3. задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна задаче максимизации энтропийного функционала (воспользовались формулой Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + o(1))$):

$$\ln \nu(\vec{n}) \approx - \sum_i n_i \cdot (\ln(n_i / \lambda_i) - 1) \text{ на множестве, задаваемом условием } (inv).$$

Теорема 2 обобщает результаты В. Вайдлиха (2000) и др. на случай, когда рассматривается более общая схема, чем модель миграции населения.

Теорема 2. Пусть

$$\forall (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in J \rightarrow \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i; \alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}, K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} = K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}},$$

$$K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) = K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \exp\left(\sum_{i: \beta_i=1} u_i(n_i+1) - \sum_{i: \alpha_i=1} u_i(n_i)\right), u_i'(n_i) \leq 0.$$

Тогда справедливо утверждения п. б) теоремы 1 с

$$\nu(\vec{n}) = \exp\left(\sum_i U_i(n_i)\right) \cdot \prod_i (n_i!)^{-1}, U_i(n_i) = 2 \sum_{v=1}^{n_i} u_i(v), \nu(\vec{n}) \approx \sum_i \{-n_i \ln(n_i) + U_i(n_i)\}.$$

Путь, по которому мы до сих пор приходили к равновесию макросистемы, состоял из следующей последовательности предельных переходов: $\lim_{t \rightarrow \infty}$ и $\lim_{M \rightarrow \infty}$.

Однако для качественного понимания того как эволюционирует макросистема бывает полезно осуществить последовательность переходов в обратном порядке.

Пусть теперь $\dim \vec{n}$ и число реакций $|J|$ не зависят от числа агентов M , и в начальный момент времени $t=0$ для любого i существует предел $c_i(0) = \lim_{M \rightarrow \infty} n_i(0)/M > 0$. Тогда в произвольный момент времени $t > 0$ для

любого i существует не случайный предел $c_i(t) = \lim_{M \rightarrow \infty}^{п.н.} n_i(t)/M$. Описанный выше

предельный переход называется каноническим скейлингом.

В результате такого скейлинга приходим к «динамике квазисредних» (терминология В. Вайдлиха):

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in J} (\beta_i - \alpha_i) K_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \bar{c}^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{c}^{\bar{\alpha}} = \prod_j c_j^{\alpha_j}. \quad (\text{ДК})$$

Это технически нетривиальное утверждение следует из результатов Троттера–Куртца (1986).

Систему (ДК) можно получить и по-другому. А именно, как приближенную динамику средних $\bar{c}_i(t) = E[n_i(t)/M]$. Приближенную в том смысле, что при выводе (ДК) используется приближение: $F(\bar{c}_i(t)) \approx E[F(n_i(t)/M)]$ для «достаточно хороших» функций F (например, полиномов). Это верно в случае пикообразного распределения $n_i(t)$.

Можно показать (следуя Батищевой–Веденяпину, 2001), что если выполняются условия (ШБП), то траектория (ДК) сходится к неподвижной точке. Какой именно, зависит, вообще говоря, от «точки старта»; но можно сказать и точнее: к той единственной неподвижной точке из семейства неподвижных точек, которая принадлежит аффинному многообразию (inv), инвариантному относительно (ДК). Для этого, вводится (минус) энтропия:

$$H(\bar{c}) = \sum_i c_i \cdot (\ln(c_i/\xi_i) - 1),$$

и показывается, что она является функцией Ляпунова для системы (ДК). Обратим внимание, что инвариантная мера $\nu(\bar{n})$ (при каноническом скейлинге) «породила» функцию Ляпунова $H(\bar{c})$. Подобные закономерности наблюдаются для рассматриваемых моделей и без условия (ШБП).

Теорема 3. Пусть инвариантная вероятностная мера представляется в виде: $\nu(\bar{n}) = M \exp(-M \cdot (H(\bar{n}/M) + o(1)))$, $M \gg 1$, где $H(\bar{c})$ строго вогнутая функция. Тогда $H(\bar{c})$ – функция Ляпунова системы (ДК).

Естественно теперь задаться вопросом: А что будет, если условия (ШБП) не выполняются, однако система (ДК) имеет на внутренности пересечения неотрицательного ортанта и инвариантного аффинного многообразия (inv)

единственную неподвижную точку (пример такой макросистемы имеется в докторской диссертации С.А. Пирогова)? Оказывается, имеет место

Теорема 4. *Если эта точка экспоненциально глобально устойчива, то 1) все инварианты (законы сохранения) системы (ДК) определяются (inv); 2) около положения равновесия инвариантная мера будет экспоненциально быстро концентрироваться (с ростом M); 3) скорость сходимости к равновесию (mixing time) оценивается как $O(M \ln M)$; 4) элементы корреляционной матрицы случайного вектора $\vec{n}(t)$ равномерно ограничены по времени; 5) предельные переходы $\lim_{M \rightarrow \infty}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty}$ перестановочны: $\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} * = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} *$.*

Результаты главы 1 и ряда других работ наталкивают на **гипотезу**: аттрактор динамической системы (ДК), который может быть сколь угодно сложным множеством (например, в приложениях типичны случаи предельных циклов, нескольких положений равновесия, и даже хаотических аттракторов), является таким множеством, в малой окрестности которого на больших временах с большой вероятностью будет пребывать рассматриваемая макросистема. Эта гипотеза для многих наиболее интересных и важных на практике случаев обоснована в диссертации с помощью техники доказательства теоремы 3.

Здесь возможны разные варианты поведения. Например, в случае двух притягивающих равновесий динамика системы “притянется” к каждому из них с вероятностями, зависящими от точки старта, и далее система может пребывать в малой окрестности равновесия длительное время, до большой флуктуации, которая сможет перебросить её в другое положение равновесия (Вентцель–Фрейдлин, 1979). Другой тип поведения: постоянно циркулировать (перемешиваться) по аттрактору. Возможно, конечно, и сочетание отмеченных типов поведения.

Во второй главе исследуются способы численного решения задачи энтропийно-линейного программирования. Согласно главе 1 именно к таким задачам часто сводятся задача поиска равновесия макросистемы.

Рассматривается общая задача энтропийно–линейного программирования:

$$-\sum_{k=1}^m x_k \ln(x_k/e) \rightarrow \max_{\vec{x} \in A \cap \mathbb{R}_+^m}; A: \vec{\Lambda}(x) = \vec{q} - T\vec{x} = \vec{0}_l, \vec{F}(\vec{x}) = \vec{d} - G\vec{x} \geq \vec{0}_w. \quad (\text{ЭЛП})$$

Для отыскания единственного решения (ЭЛП) было предложено семейство двойственных барьерно-мультипликативных итерационных алгоритмов, которое содержит алгоритмы Брэгмана–Шелейховского, MART, GISM, Ю.С. Попкова и др.:

$$\begin{cases} x_k^n = \exp\left(-\sum_{p=1}^l t_{pk} \lambda_p^n - \sum_{q=1}^w g_{qk} \mu_q^n\right), & k = 1, \dots, m; \\ \lambda_p^{n+1} = \lambda_p^n - \gamma h_p^\lambda\left(q_p - \sum_{k=1}^m t_{pk} x_k^n\right), & p = 1, \dots, l; \\ \mu_q^{n+1} = \mu_q^n - \alpha \mu_q^\mu\left(d_q - \sum_{k=1}^m g_{qk} x_k^n\right), & q = 1, \dots, w, \end{cases} \quad (\text{ИП})$$

где шаги $T = \|t_{pk}\|_{p,k=1}^{l,m}$, $G = \|g_{qk}\|_{q,k=1}^{w,m}$, $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ – достаточно маленькие, а дважды гладкие функции $\{h_p^\lambda(\cdot)\}_{p=1}^l$, $\{h_q^\mu(\cdot)\}_{q=1}^w$ – монотонно возрастают и равны нулю в нуле. Например, часто выбирают

$$h_p^\lambda(y) = -\ln(1 - y/q_p), \quad p = 1, \dots, l; \quad h_q^\mu(y) = y/d_q, \quad q = 1, \dots, w.$$

Однако, как правило, разумно (с точки зрения эффективности счета) обнулять на каждом шаге большую часть случайно выбранных компонент этих векторов, причем вероятностный отбор осуществляется исходя из текущего состояния итерационного процесса, при этом после обнуления большинства компонент и соответствующего вытягивания по оставшимся (чтобы сохранить приблизительно длину) получившейся вектор должен быть достаточно близким к градиенту. То есть разумно осуществлять в двойственном пространстве своеобразный стохастический субградиентный спуск.

Глобальная сходимость итерационного процесса была установлена при следующих предположениях:

$$1) \exists \bar{z} > \bar{0}_m : \bar{q} - T\bar{z} = \bar{0}_l, \quad \bar{d} - G\bar{z} \geq \bar{0}_w;$$

2) Строки матриц T и G линейно независимы в совокупности.

При этом было замечено, что предположение 2 не всегда выполняется в прикладных задачах (см., например, модель ранжирования web-страниц Дж.А. Томлина). Оказывается, что от предположения 2 можно отказаться. А именно, если справедливо только предположение 1, то найдутся такие достаточно

маленькие шаги (в зависимости от начального приближения), что итерационный процесс (ИП) будет сходиться (глобально) к единственному решению задачи (ЭЛП). Доказательство в целом аналогично случаю регулярных ограничений. Однако, в случае зависимых ограничений решение двойственной задачи, вообще говоря, не будет единственным. Поэтому исследовать итерационный процесс следует в должным образом факторизованном пространстве.

Итерационные алгоритмы (ИП) особенно эффективны:

- для сильно разреженных матриц T и G ;
- при $l + w \ll m$.

При этом время работы (число арифметических операций типа умножения двух чисел с плавающей точкой) детерминированного алгоритма (ИП) оценивается, соответственно, как $O(m + l + w)$ и $O(m \cdot (l + w))$. Как показывают вычислительные эксперименты, стохастические варианты, о которых говорилось выше, работают заметно быстрее.

Текст соответствующих компьютерных программ, написанных на MatLab, имеется в приложении.

В третьей главе излагается модель Бэкмана равновесного распределения транспортных потоков, в которую вводятся две возможные динамики. Исследование возникающих макросистем позволяет глубже понять концепцию равновесия Нэша–Вардропа.

Предварительно опишем модель Бэкмана равновесного распределения потоков на графе транспортной сети.

Пусть транспортная сеть города представлена ориентированным графом $\Gamma = (V, E)$, где V – узлы сети (вершины), $E \subset V \times V$ – дуги сети (рёбра графа). Пусть $W = \{w = (i, j) : i, j \in V\}$ – множество корреспонденций, т.е. возможных пар «исходный пункт» – «цель поездки»; $p = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – путь из v_1 в v_m , если $(v_k, v_{k+1}) \in E$, $k = 1, \dots, m-1$, $m > 1$; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции $w \in W$, то есть если $w = (i, j)$, то P_w – множество путей,

начинающихся в вершине i и заканчивающихся в j ; $P = \bigcup_{w \in W} P_w$ – совокупность всех путей в сети Γ ; x_p [автомобилей/час] – величина потока по пути p , $\vec{x} = \{x_p : p \in P\}$; y_e [автомобилей/час] – величина потока по дуге e :

$$y_e(\vec{x}) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p, \text{ где } \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases};$$

$\tau_e(y_e)$ – удельные затраты на проезд по дуге e (как правило, возрастающие, выпуклые, гладкие функции).

Рассмотрим теперь $G_p(\vec{x})$ – затраты временные или финансовые на проезд по пути p . Естественно считать, что $G_p(\vec{x}) = \sum_{e \in E} \tau_e(y_e(\vec{x})) \delta_{ep}$, где $\tau_e(y_e)$ – удельные затраты на проезд по дуге e . Как правило, предполагают, что это – возрастающие, гладкие функции от y_e . В приложениях часто требуется учитывать также затраты на прохождение вершин графа, которые могут зависеть от величин всех потоков через рассматриваемую вершину.

Пусть также известно, сколько перемещений в единицу времени d_w осуществляется согласно корреспонденции $w \in W$. Тогда вектор \vec{x} , характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом

$$\text{множестве: } X = \left\{ \vec{x} \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W \right\}.$$

Это множество может иметь и более сложный вид, если дополнительно учитывать, например, конечность пропускных способностей рёбер (ограничения сверху на y_e).

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w \in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w \gg 1$), набор однотипных “игроков”, осуществляющих передвижение согласно корреспонденции w . Чистыми стратегиями игрока служат пути, а выигрышем – величина $-G_p(\vec{x})$. Игрок “выбирает” путь следования $p \in P_w$, при этом, делая выбор, он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят $|P_w|$ компонент вектора \vec{x} и, следовательно, сам выигрыш $-G_p(\vec{x})$. Можно показать, что отыскание равновесия Нэша–Вардропа $\vec{x}^* \in X$

(макро описание равновесия) равносильно решению задачи нелинейной комплементарности (принцип Вардропа): для любых $w \in W$, $p \in P_w$ выполняется

$$x_p^* \cdot \left(G_p(\vec{x}^*) - \min_{q \in P_w} G_q(\vec{x}^*) \right) = 0.$$

Заметим, что рассматриваемая нами игра принадлежит к классу, так называемых, потенциальных игр. В нашем случае это означает, что существует

такая функция $\Psi(\vec{x}) = \sum_{e \in E} \int_0^{\sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p} \tau_e(z) dz$, что $\partial \Psi(\vec{x}) / \partial x_p = G_p(\vec{x})$ для любого

$p \in P$. Оказывается, что $\vec{x}^* \in X$ – равновесие Нэша–Вардропа тогда и только тогда, когда оно доставляет минимум $\Psi(\vec{x})$ на множестве X .

Введем теперь в эту статическую модель динамику. Пусть на шаге n игрок, осуществляющий перемещение согласно корреспонденции w , выбрал путь p . Обозначим количество таких игроков через $x_p(n)$. Тогда на шаге $n+1$ он с вероятностью $1 - \gamma_n$ выбирает тот же путь, а с вероятностью γ_n использует смешанную стратегию: выбирает путь $p \in P_w$ с вероятностью

$$\text{Prob}_p^w(n+1) = \gamma_n \cdot \max(x_p(n), 1/n) \exp(-G_p(\vec{x}(n))/T) / Z_n^w, \quad w \in W,$$

где Z_n^w определяется из условия нормировки. Множитель $\max(x_p(n), 1/n)$ характеризует желание имитировать, т.е. использовать стратегию большинства, а также надежность использования этой стратегии (при одинаковых затратах на разных путях «надежнее» выбрать тот путь «вчерашнего дня», который использовало большее число игроков – относительная флуктуация, характеризующая риски, будет меньше). Параметр γ характеризует «консерватизм» («ленивость»), чем меньше γ , тем более консервативный игрок; «температура» T характеризует отношение к риску («горячность»), чем больше температура, тем более «горячий игрок», склонный к более рискованным действиям.

Как показали разнообразные численные эксперименты, часто вполне разумно выбирать $\gamma_n \sim 1/n$. При таком выборе γ_n наблюдается сходимость к равновесию Нэша–Вардропа при наиболее общих условиях относительно T (вне зависимости

от точки старта). Стоит также обратить внимание на высокую эффективность предложенной процедуры «нащупывания равновесия». Иначе говоря, на предложенный итерационный процесс можно смотреть просто как на эффективный способ численного нахождения равновесия Нэша–Вардропа.

Предложенную схему можно трактовать как стохастическую динамику наилучших ответов в эволюционной (популяционной) игре, при этом имеется много общего с концепциями «quantal response equilibria» (используется похожая рандомизация) и «minority games» (наблюдаются похожие колебания около положения равновесия). Однако наиболее близким к предложенному итерационному процессу является эффективный приближенный вероятностный алгоритм Григориадиса–Хачияна (см. также Фройнда–Шапиро), являющийся предтечей современных вариантов метода стохастического зеркального спуска.

Имеет место следующее утверждение, при доказательстве которого активно используется недавняя работа Немировского–Юдитского–Шапиро и др. по стохастическому зеркальному спуску.

Утверждение. Пусть $T > 0$ – достаточно мало, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 < \infty$. Тогда

$$\vec{x}(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.н.} \vec{x}^*(\vec{x}(0)) \text{ – одно из равновесий.}$$

Если равновесие \vec{x}^* единственно, то $\vec{x}^*(\vec{x}(0)) \equiv \vec{x}^*$.

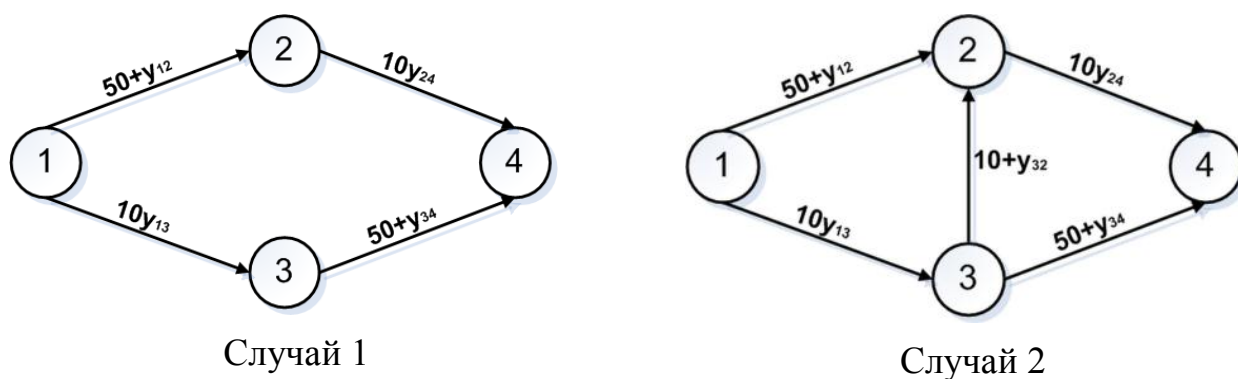


Рис. 1

Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$.

Полное время в пути $T = 83$ мин

Случай 2: $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$.

Полное время в пути $T = 92$ мин

Пример (парадокс Браеса, 1968). Пусть корреспонденция $d_{14} = 6$ (тысяч [автомобилей/час]). Вес ребра e (удельные затраты на проезд по этому ребру) есть время движения по ребру (в минутах) $\tau_e(y_e)$, если поток через ребро есть y_e (тысяч [автомобилей/час]). Значения функций $\tau_e(y_e)$ приведены на рис. 1. Напомним, что потоки по ребрам можно рассчитать исходя из потоков по путям, например, в случае 2 на рис. 1: $y_{24} = x_{124} + x_{1324}$. Оба равновесия Нэша–Вардропа (в случаях 1 и 2) являются «притягивающими» положениями равновесия описанной выше динамики.

Кажется удивительным, но в парадоксе Браеса в случае строительства “паразитной” дороги участники движения, действуя согласно описанной выше динамике (каждый преследует свои интересы), действительно “приходят” к единственно возможному “плохому” равновесию Нэша–Вардропа, которое в данном примере не оптимально по Парето. Такие ситуации уже давно наблюдались в реальной жизни (например, в Германии и Голландии). Пару лет назад был поставлен эксперимент на базе парадокса Браеса с участием студентов в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ, который подтвердил, что после введения “паразитной” дороги водители–студенты приходили, причем довольно быстро, к “плохому” равновесию и пребывали там большую часть времени эксперимента.

Примечательно, что в повторяющихся потенциальных играх (наш случай), какая-либо разумная динамика нащупывания равновесия Нэша также является (иногда, довольно эффективным, как в случае зеркального спуска) вычислительным способом поиска равновесия. Часто эту динамику можно проинтерпретировать как субградиентный спуск с функцией $\Psi(\bar{x})$, убывающей (в среднем) на траекториях.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

В приложении приводятся результаты численных экспериментов решения задачи энтропийно-линейного программирования, к которой часто сводится задача поиска равновесий в макросистеме, а также текст соответствующей компьютерной программы, написанной на Matlab.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Получено новое достаточное условие, обеспечивающее существование и единственность равновесия динамической макросистемы. Показано, что при довольно естественных условиях время сходимости к равновесию достаточно мало.
2. Рассмотрена макросистема игровой природы (модель равновесного распределения потоков), когда равновесие этой макросистемы интерпретируется как равновесие Нэша. Введенная динамика позволяет в случае, если таких равновесий много, выбрать единственное. При этом процедура отбора основана на концепции равновесия макросистемы.
3. Выявлен характер связи функции Ляпунова макросистемы с инвариантной мерой этой макросистемы.
4. Для известной статической энтропийной модели расчета матриц корреспонденций предложено обобщение, учитывающее транспортную доступность мест работы, а также динамическая интерпретация, основанная на стохастической динамике и описывающая стремление людей жить поближе к месту работы.
5. Получено обобщение модели миграции населения В. Вайдлиха на случай более общих правил, описывающих возможности мигрирования.
6. Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы поиска равновесий динамической макросистемы, сводящиеся к задачам энтропийно-линейного программирования. Полученные алгоритмы являются обобщением ранее известных алгоритмов Брэгмана–Шелейховского, MART, GISM, Ю.С. Попкова и др. Разработан соответствующий комплекс программ.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Гасникова Е.В.* Двойственные мультипликативные алгоритмы для задачи энтропийно-линейного программирования // Труды 50-й научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2007 г. Ч. 7. Т. 1. С. 106-109.
2. *Гасникова Е.В.* Барьерно-мультипликативные алгоритмы для двойственных задач // Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов «Информационные технологии и системы ИТиС'08». 29 сентября – 3 октября 2008 года, изд-во ИППИ РАН, г. Геленджик. С. 423-429.
3. *Гасникова Е.В.* Барьерно-мультипликативные алгоритмы для задач, двойственных к задачам оптимизации энтропийно подобных функционалов на выпуклых множествах простой (аффинной) структуры // Труды 51-й научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2008 г. Ч. 7. Т. 1. С. 21-25.
4. *Гасникова Е.В.* Поиск равновесий макросистем с помощью мультипликативно-барьерных модификаций итерационных алгоритмов Коши и Ньютона // Тезисы докладов международной конференции «Математическая теория систем» МТС-2009» 6 – 30 января 2009 года, М.: Изд-во МФТИ. С. 150-154.
5. *Гасникова Е.В.* Двойственные мультипликативно-барьерные алгоритмы отыскания вырожденных равновесий макросистем // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» 30 марта – 02 апреля 2009 года МГУ, М.: МАКС Пресс, ВМиК МГУ. С. 317.
6. *Гасникова Е.В.* Двойственные мультипликативные алгоритмы для задач энтропийно-линейного программирования // ЖВМ и МФ Т.49 № 3 Изд-во МАИК «Наука/Интерпериодика», 2009 г. С. 453-464.
7. *Гасников А.В., Гасникова Е.В.* О принципе максимума энтропии в сетевых моделях // Тезисы докладов IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2009), Киров, 6 – 12 июля 2009. Киров: Изд-во ВятГУ, 2009. С. 38.
8. *Гасников А.В., Гасникова Е.В.* О принципе максимума энтропии в модели (А.Дж. Вильсона) расчета матрицы корреспонденций // Сборник трудов IV Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики» (ЭКОМОД-2009), Киров, 6-12 июля 2009. Киров: Изд-во ВятГУ, 2009. С. 110-121.
9. *Гасников А.В., Гасникова Е.В., Дорн Ю.В.* О некоторых примерах конечных однородных эргодических марковских процессов с огромным числом состояний // Труды 52-ой научной конференции МФТИ, – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2009. Ч. 7. Т. 1. С. 19-22.

10. Буслаев А.П., Гасников А.В., Гасникова Е.В., Холодов Я.А., Яшина М.В. Возможная динамика в модели Дж. Вардропа. Труды VI международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс. 19-23 октября 2010. С. 22-23.
11. Гасникова Е.В. О равновесиях макросистем. Труды VI международной конференции по исследованию операций. М.: МАКС Пресс. 19-23 октября 2010. С. 139-140.
12. Гасников А.В., Гасникова Е.В. О возможной динамике в модели расчета матрицы корреспонденций (А.Дж. Вильсона) // Труды МФТИ, Т. 2. № 4(8). Изд-во МФТИ, 2010. С. 45-54.
13. Гасникова Е.В., Дорн Ю.В. О стохастической марковской динамике, приводящей к равновесию Нэша – Вардропа в модели распределения потоков // Труды МФТИ, Т. 2. № 4(8). Изд-во МФТИ, 2010. С. 55-57.
14. Гасникова Е.В. О социально-экономических приложениях уравнений стохастической химической кинетики, динамике средних и динамике, полученной в результате скейлинга // Труды 53-й научной конференции МФТИ, – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2010. Ч. 7. Т. 1. С. 88-90.
15. Гасникова Е.В. О стохастической марковской динамике наилучших ответов, приводящей к равновесию Нэша–Вардропа // Труды 53-й научной конференции МФТИ. – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2010. Ч. 7. Т. 1. С. 106-107.
16. Гасникова Е.В., Ишманов М.С., Колесников А.В., Нагапетян Т.А. О скорости сходимости к равновесию макросистемы // Тезисы докладов VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), Киров, 27 июня – 3 июля 2011. Киров: Изд-во ВятГУ, 2011, С. 35.
17. Гасникова Е.В., Нагапетян Т.А. О достаточных условиях существования равновесия макросистемы // Тезисы докладов VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), Киров, 27 июня – 3 июля 2011. Киров: Изд-во ВятГУ, 2011, С. 36.
18. Аввакумов С.Я., Гасников А.В., Гасникова Е.В. О сходимости к равновесию Нэша-Вардропа // Тезисы докладов Международной научной конференции «Динамические системы, нелинейный анализ и их приложения», Армения (г. Ереван): Изд-во МАКС Пресс, 10 июля – 17 июля 2011. С. 47-48.
19. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Колесников А.В., Нагапетян Т.А. О концепции равновесия макросистемы и её приложении к модели равновесного распределения потоков // Труды Международной научной конференции “50 лет ИППИ РАН”, – М.: Изд-во ИППИ РАН, 25 июля – 29 июля 2011. Москва, 2011. С. 53-61.
20. Gasnikov A.V., Gasnikova E.V., Nagapetyan T.A. On the convergence to one of the Nash-Wardrop's equilibriums // Traffic and granular flow'11. International conference. Moscow, 28 September – 1 October 2011. Изд-во МТУСИ. P. 296-298.

21. *Гасникова Е.В., Аввакумов С.Я.* О равновесиях в моделях распределения потоков // Труды VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), Киров, 27 июня – 3 июля 2011. Киров: Изд-во ВятГУ, 2011. С. 111-118.
22. *Гасникова Е.В.* О новых условиях существования равновесия макросистемы // Труды VI Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики и экологии» (ЭКОМОД-2011), Киров, 27 июня – 3 июля 2011. Киров: Изд-во ВятГУ, 2011. С. 100-110.
23. *Гасникова Е.В.* Достаточные условия существования равновесия макросистем // Труды 54-й научной конференции МФТИ, – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2011. Ч. 7. Т. 1. С. 64-65.
24. *Гасникова Е.В.* Концепция равновесия макросистемы в модели распределения потоков // Труды 54-й научной конференции МФТИ, – М., Долгопрудный: Изд-во МФТИ, 2011. Ч. 7. Т. 1. С. 88-89.
25. *Gasnikova E.V., Nagapetyan T.A.* About new dynamical interpretations of entropic model of correspondence matrix calculation and Nash–Wardrop's equilibrium in Beckmann's traffic flow distribution model. Ninth International Conference on Traffic and Granular Flow, 28 September – 1 October 2011. Moscow: Springer, 2012. [arXiv:1112.1628v3](https://arxiv.org/abs/1112.1628v3)
26. *Gasnikov A.V., Gasnikova E.V.* A conception of equilibrium of a macrosystem in application to the traffic flow distribution in large transport networks // International Conference "Instabilities and Control of Excitable Networks: From macro – to nano-systems" Dolgoprudny, Moscow Area, RUSSIA, May 25 – 30, 2012. P. 16.
27. *Гасников А.В., Гасникова Е.В., Петрашко Д.И.* Макросистемный подход к ранжированию web-страниц // «Информационные технологии и системы – 2012» 35-я конференция молодых ученых и специалистов ИППИ РАН, ПреМоЛаб, СТРАДО. г. Петрозаводск: Изд-во ИППИ РАН. С. 423-429.
28. *Gasnikov A.V., Gasnikova E.V.* Stochastic optimization in the model of correspondences matrix calculation and traffic flow distribution // 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2012). Springer: Berlin, August 19 – 24, 2012. P. 217.
29. *Gasnikov A.V., Gasnikova E.V.* Stochastic subgradient barrier-multiplicative descent for entropy optimization // International conference ОПТИМА-2012. September 23 – 30, 2012. Costa da Caparica, Portugal: Из-во ВЦ РАН. P. 91-92.
30. *Гасникова Е.В.* О возможной динамике в модели расчета матриц корреспонденций // Приложение к монографии «Введение в математическое моделирование транспортных потоков» Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2012. С. 250-273.

Гасникова Евгения Владимировна

**Моделирование динамики макросистем на
основе концепции равновесия**

Автореферат

Подписано в печать 02.11.2012.

Печать трафаретная

Усл.п.л. – 1,0

Заказ № 4893 Тираж: 100 экз.

Типография «11-й ФОРМАТ»

ИНН 7726330900

115230, Москва, Варшавское ш., 36

(499) 788-78-56

www.autoreferat.ru