Фермион-фермионное взаимодействие в разбавленной бозе-конденсированной газовой смеси

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{2}{e}\right)^{7/3} \epsilon_F \exp(-1/\lambda)$$

ϵ_F - энергия Ферми или температура вырождения

Константа связи $\lambda = (2p_F|a|)/\pi$.

a - длина рассеяния

$\hbar = 1$ $k_B = 1$

В ферми-бозе газовой смеси два фермиона могут взаимодействовать друг с другом, обмениваясб бозонами из конденсата или надконденсата.

Фермион, двигаясь в газе бозонов, поляризует вокруг себя бозевскую подсистему. Фермион, одетый таким поляризованным облаком, подобен поляроне в случае электрон-фононного взаимодействия.

Действие для всей системы:

$$S = S_B + S_F + S_i.$$

S_B - действие, связанное с бозе-подсистемой

$$S_B = \int dx\, \Phi^* \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\Delta}{2m} - \mu_B + g\Phi^*\Phi \right) \Phi\, .$$

:

Действие, ответственное за ферми-систему:

$$S_F = \int dx \sum_{\sigma} \Psi^*_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\Delta}{2M} - \mu_F + g_f \Psi^*_{-\sigma}\Psi_{-\sigma} \right) \Psi_\sigma$$

Действие, описывающее взаимодействие фермионов и бозонов:

$$S_i = \int dx dx' \sum_{\sigma} \Phi^*(x)\Psi^*_\sigma(x') u(x - x')\Psi_\sigma(x')\Phi(x)$$

Взаимодействие фермионов и бозонов:

$$u(x - x') = u(\vec{r} - \vec{r}')\delta(\tau - \tau')$$

Для изучения свойств системы необходимо рассчитать статистическую сумму:

$$Z = \int \mathcal{D}^2\Psi\, \mathcal{D}^2\Phi\, \exp(-S)$$

Выделим независящую от пространственной координаты часть бозонного поля:

$$\Phi(x) = c_0(\tau) + \phi(x)$$

$$Z = \int \mathcal{D}^2\Psi\, \exp(-S_F) \int \mathcal{D}^2 c_0\, \exp(-S_0 - S_\phi)$$

$$S_0 = \int d\tau\, c_0^* \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + V(0) - \mu_B + \frac{g}{2} c_0^* c_0\right) c_0$$

$$S_\phi = \mathrm{Tr}\ln(\widehat{G}^{-1} + \widehat{V}) - \mathrm{Tr}\frac{1}{2}A^+(\widehat{G}^{-1} + \widehat{V})^{-1}A$$

$$\widehat{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix}$$

$$A^+ = \left(c_0^* V,\ c_0 V\right), \qquad A = \begin{pmatrix} V c_0 \\ V c_0^* \end{pmatrix}$$

Раскладывая действие по фермион-бозонному взаимодействию V:

$$S_\phi \approx \mathrm{Tr}\ln\widehat{G}^{-1} + \mathrm{Tr}(\widehat{G}\widehat{V}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\widehat{G}\widehat{V}\widehat{G}\widehat{V}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^+\widehat{G}A)$$

Обратная и прямая матрица функции Грина даются выражениями

$$\widehat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G_0^{-1} + \Sigma_{11} & \Sigma_{20} \\ \Sigma_{02} & \bar{G}_0^{-1} + \bar{\Sigma}_{11} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} G & F \\ F^* & \bar{G} \end{pmatrix}$$

F и F^* – аномальные бозонные функции Грина

$$G_0^{-1}(x) = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\Delta}{2m} + V(x) - \mu_B$$

Собственно-энергетические части в приближении малой плотности

$$\Sigma_{11} \approx 2gc_0^*c_0, \quad \Sigma_{02} \approx gc_0^*c_0^*, \quad \Sigma_{02} \approx gc_0c_0$$

Пренебрежем флуктуациями конденсата в силу макроскопичности чисел заполнения:

$$c_0^* \approx c_0 \approx \sqrt{n_0}$$

$$U_{eff}(x-x') = -\int u(x,y)\Pi(y,y')u(y',x')dydy'.$$

В случае точечного взаимодействия $u(\boldsymbol{r}) = u(0)\delta(\boldsymbol{r})$, когда $u(0)$ связано с длиной s-рассеяния a_{BF} через приведенную массу бозона и фермиона $m_{пр} = mM/(m+M)$ согласно $u(0) = 2\pi a_{BF}/m_{пр}$, выражение для эффективного взаимодействия упрощается

$$U_{eff} = -u^2(0)\Pi(x-x')$$

$$\Pi(k,\omega_n) = \Pi_{cn}(k,\omega_n) + \Pi_{nn}(k,\omega_n) = n_0\left[G_{\omega_n}(k) + \bar{G}_{\omega_n}(k) + F_{\omega_n}(k) + F^*_{\omega_n}(k)\right] +$$

$$n_0\left[G_{\omega_n}(k) + \bar{G}_{\omega_n}(k) + F_{\omega_n}(k) + F^*_{\omega_n}(k)\right] + T\sum_{\epsilon_m}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[G_{\epsilon_m}(p)G_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) +\right.$$

$$\left.\bar{G}_{\omega_m}(p)\bar{G}_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) + F_{\epsilon_n}(k)F^*_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k) + F^*_{\epsilon_n}(k)F_{\epsilon_m-\omega_n}(p-k)\right]$$

$$\Pi_{cn}(k,\omega_n) = 2n_0 \frac{\eta_k}{\omega_n^2 + \epsilon_k^2}$$

$$\eta_k = \frac{k^2}{2m}, \quad \Delta = mc^2 \quad \text{и} \quad \epsilon_k = \sqrt{\eta_k^2 + 2\Delta\eta_k}$$

Статическое выражение даёт короткодействующий потенциал Юкавы:

$$\Pi_{cn}(r) = \frac{mn_0}{\pi r} e^{-r/\xi}$$

длина когерентности:

$$\xi = 1/(2\sqrt{m\Delta})$$

$$\Pi_{nn}(k,0) = \frac{\Delta^2}{2\pi^2 c^3} \begin{cases} \ln(2/k\xi) + \pi - 4, \\ k\xi \ll 1, \\ 6/(3k\xi)^2,\ k\xi \gg 1. \end{cases}$$

$$\Pi_{nn}(r) = \frac{\Delta^2}{(2\pi c)^3} \begin{cases} 1/r^3, & r \gg \xi \\ 2/(3\xi^2 r), & r \ll \xi \end{cases}$$

Дальнодействующая часть взаимодействия, отвечающее обмену двумя надконденсатными бозонами, слабее по газовому параметру, чем короткодействующая часть, связанная с обменом конденсатным и надконденсатным бозонами. Их отношение на характерном расстоянии $r \sim \xi$ порядка

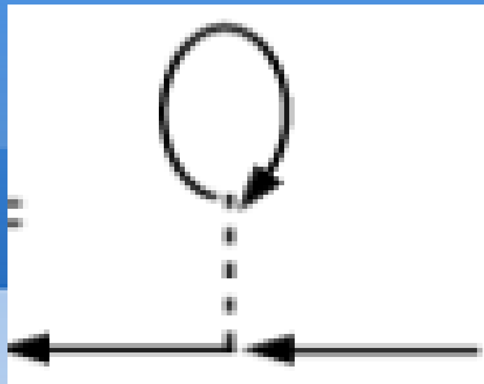
$$\frac{\Pi_{nn}(r \sim \xi)}{\Pi_{cn}(r \sim \xi)} \sim (n_0 a_{BB}^3)^{1/2} \ll 1$$

Эффективная масса фермиона в случае вырожденной ферми-компоненты.

Фермион-фермионное взаимодействие имеет вид:

$$U_{eff}(\omega , k) = -u^2(k)\Pi(\omega .k)$$

$$\Pi(\omega, k) = \Pi_{cn}(\omega, k) + \Pi_{nn}(\omega, k)$$



$$-2iu^2(0)\Pi_{cn}(0,0)\int G_0(\omega,p_1)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}$$

$$-2i\int u^2(k)G_0\left(\epsilon-\omega,p-k\right)\Pi_{cn}(\epsilon,k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\Sigma_{cn}(\epsilon,\boldsymbol{p}) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\iint u^2(k)G_0(\epsilon-\omega,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\Pi_{cn}(\omega,\boldsymbol{k})\,d\omega\,d^3k$$

Одночастичная функция фермионов в вырожденном ферми-газе:

$$G_0(\epsilon, p) = \frac{1}{\epsilon - \xi_p + i\delta \operatorname{sgn} \xi_p}$$

Поляризационный оператор сходен с функцией Грина фононов в металле:

$$\Pi_{cn}(\omega, k) = -2n_0 \frac{\eta_k}{\omega^2 - \epsilon_k^2 + i\delta}$$

Перенормированная функция Грина вблизи ферми-поверхности:

$$G(\epsilon, p) = \frac{1}{\epsilon - \Sigma - \xi_p} = \frac{1}{(1+b)\epsilon - \xi_p + i\gamma(\epsilon)}.$$

Поправка к собственно-энергетической части при энергиях ϵ, малых по сравнению с химпотенциалом, и имульсах, близких к импульсу Ферми имеет вид:

$$\operatorname{Re}\Sigma_{cn}(\epsilon, p_F) - \Sigma_{cn}(0, p_F) = -b\epsilon$$

Амплитуда перенормированной функции Грина:

$$Z = 1/(1+b)$$

Перенормированный спектр фермионов:

$$\epsilon = \frac{\xi_p}{1+b}$$

Перенормированная масса фермионов:

$$M^* = M(1+b)$$

Обозначим $\beta = M/m$, $\alpha = v_F/c$.

При $\beta \ll 1$

$$b \approx \frac{n_0 u^2(0) M}{\pi^2 c} \begin{cases} \frac{\ln(1+(\alpha\beta)^2)}{2\alpha\beta}, & \alpha \gg \ln\frac{1}{\beta}, \\ \beta \ln\frac{1}{\beta}, & \alpha \ll \ln\frac{1}{\beta}. \end{cases}$$

При $\beta = 1$

$$b \approx \frac{n_0 u^2(0) M}{\pi^2 c} \begin{cases} \frac{\ln\alpha}{\alpha}, & \alpha \gg 1, \\ \frac{1}{3}, & \alpha \ll 1. \end{cases}$$

При $\beta \gg 1$

$$b \approx \frac{n_0 u^2(0) M}{\pi^2 c} \begin{cases} \frac{\ln\alpha\beta}{\alpha\beta}, & \alpha \gg 1, \\ \frac{1}{\beta}, & \alpha \ll 1. \end{cases}$$

При больших скоростях Ферми $v_F \gg c$ перенормировка массы убывает как $\frac{c}{v_F} \ln \frac{v_F}{c}$. В обратном пределе $v_F \ll c$ перенормировка массы тем больше, чем меньше скорость Ферми по отношению к скорости звука. В этом случае медленно движущийся фермион более эффективно поляризует бозонную подсистему.

Множитель перед фигурной скобкой выражается через газовый параметр:

$$\frac{m n_0}{2\pi^2 c} u^2(0) = \sqrt{\frac{n_0 a_{BB}^3}{\pi}} \left(\frac{a_{BF}}{a_{BB}}\right)^2$$

Поправка к массе, вносимая прямым фермион-фермионным взаимодействием:

$$\frac{M^*}{M} = 1 + \frac{8(7\ln 2 - 1)}{15} (p_F a_{FF})^2 > 1$$

Считая амп $a_{BB} \sim a_{BF} \sim a_{FF} \sim a$ дного порядка:

При

$$\frac{p_F^3}{n_0} \lesssim \left(\frac{\pi}{n_0 a^3}\right)^{1/4}$$

вклад от взаимодействия с бозонами является основным.

Мнимая часть собственно-энергетической части:

$$-\operatorname{Im}\Sigma(\epsilon, p_F) = \begin{cases} \frac{n_0 c M^2 \alpha^6 \beta}{64\pi} u^2(0) \frac{1+v_F/c+\frac{1}{3}(v_F/c)^2}{(1+v_F/c)^3} \frac{\epsilon|\epsilon|^2}{\mu^3}, \\ \text{при} \quad |\epsilon| \ll \frac{4\mu v_F}{c}\sqrt{1+\left(\frac{M v_F}{mc}\right)^2}, \\ \frac{n_0 u^2(0) M^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi (M/m+1)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\epsilon}, \\ \text{при} \, |\epsilon| \gg \frac{4\mu v_F}{c}\sqrt{1+\left(\frac{M v_F}{mc}\right)^2}. \end{cases}$$

Свойства системы в случае невырожденной ферми-компоненты.

$$\Sigma_{cn}(\epsilon, \boldsymbol{p}) = -i \iint u^2(k)\, G_0(\epsilon-\omega, \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\, \Pi_{cn}(\omega, \boldsymbol{k})\, \frac{d\omega\, d^3k}{(2\pi)^4}$$

$$G_0(\epsilon\,, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{\epsilon - p^2/2M + i\,\delta}$$

Мнимая составляющая собственно-энергетической части:

$$\Sigma''_{cn}\left(\epsilon = \frac{p^2}{2m}, p\right) = \begin{cases} 0, & v < c, \\ -\frac{n_0 u^2(0) M^3}{3\pi m c^2}(v-c)^3, & \frac{v-c}{c} \ll 1\,, \\ -\frac{n_0 u^2(0) M^2 m^2}{2\pi (M+m)^2} v, & \frac{v-c}{c} \gg 1\,. \end{cases}$$

Таким образом, фермион со скоростью, меньшей скорости звука, в первом приближении по газовому параметру $n_0 a_{BB}^3$ не может рождать возбуждений в бозонной подсистеме и движется без затухания. Этот результат полностью коррелирует с критерием Ландау для критической скорости. Затухание, которое возникает при $v > c$, полностью аналогично черенковскому излучению заряженной частицы при ее движение со скоростью, большей скорости света в среде.

Фермион-фермионное затухание вблизи ферми-сферы:

$$\epsilon^2/\mu$$

$$a_{BB} \sim a_{BF} \sim a_{FF} \sim a$$

При $\alpha = v_F/c \gg 1/(n_0 a_{BB}^3)^{1/6}$ затухание,

связанное с обменом бозонами преобладает.

1. Фермион-фермионное взаимодействие носит косвенный характер и возникает в результате обмена бозе-частицами.

2. Обмен конденсатной и надконденсатной частицами дает короткодействующий вклад во взаимодействие фермионов. Обмен двумя надконденсатными частицами имеет дальнодействующий характер.

3. Эффективная масса фермиона увеличивается. Поляронный эффект сильнее при меньшей скорости ферми.

4. Затухание вблизи ферми-поверхности всегда меньше энергии квазичастиц. В невырожденном газе фермионов затухание определяется рождением фонона.

5. Согласно теореме Мигдала поправка к вершина электрон-фононного взаимодействия

$$\omega_D/\varepsilon_F$$

при малости скорости звука по сравнению со скоростью Ферми ей можно пренебречь.

Автор благодарен С.Н. Бурмистрову за постановку задачи и обсуждение, а также Марку Шаттлворту за оказанную поддержку.