Необычные свойства обычного пространства, или как измерить длину доски *

Е. И. Зеленов

06 июля 2010 года

1 Подходы математической физики. Одна из возможных точек зрения.

Математическая физика (М∩Ф)- особый взгляд на физическую реальность.

Почему все-таки физика? Просто потому, что исходные мотивировки М∩Ф - построение моделей конкретных физических явлений, или построение теорий, описывающих физические явления.

Почему математическая физика? С точки зрения математической физики, соотношения между математическими понятиями (которые моделируют физические объекты) имеют самостоятельную ценность, и столь же реальны, как и физические законы. Продукт труда математического физика - математическое утверждение (Теорема). Физика в этом процессе выступает как источник мотивировок на этапе постановки задачи, и как источник вдохновения - физическая интуиция - в процессе решения.

*Евгений Зеленов, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, evgeny.zelenov@gmail.com

2 Моделирование реальности.

Алгоритм действия таков: физическое явление → математическое понятие → математическое утверждение. Первый шаг этого алгоритма условно назовем моделированием физической реальности.

Рассмотрим простой, на первый взгляд, физический эксперимент. Задача - измерить длину линейного объекта, например, доски. Другими словами, для конкретной доски мы должны сделать утверждение: длина доски составляет столько-то метров, сантиметров, миллиметров, долей миллиметра и т.д.

Прежде всего нужно определить, что такое один метр. Другими словами, нужен эталон. История эталона метра весьма поучительна, и как в зеркале отражает развитие экспериментальной физики. Для наших простых целей используем так называемый "архивный"эталон (брусок из сплава платины и иридия, который хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, использовался в качестве эталона до 1960 года). Современные эталоны устроены, конечно, совсем иначе. Отметим только, что точность современных эталонов для атомных измерений составляет около 10^{-13} м - это будет нам важно в дальнейшем.

Начинаем мерять нашу доску и смотреть, какие математические понятия возникают в этом процессе. Процесс разобъем на несколько этапов.

Этап 0.

Берем некоторое количество эталонов и прикладываем их один к другому, начиная с начала доски до тех пор, пока конец некоторого эталона не выдет за пределы доски. На этом первый этап измерений заканчиваем.

Проанализируем, какие математические понятия и утверждения нам потребовались на этом этапе.

Фраза "... некоторое количество эталонов ..."подразумевает понятие *натурального числа* - числа $1, 2, 3, \ldots,$. Развивая это понятие, приходим к понятию *целого числа*, и далее к понятию *группа целых чисел.* Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ - это множество, состоящее из следующих элементов: натуральные числа $1, 2, 3, \ldots$, обратные к натуральным числам $-1, -2, -3, \ldots$ и 0 с операцией сложения.

Символически результат первого этапа можно записать следующим образом.

$$k_0 \leq L < k_0 + 1.$$

L - искомая длина доски.

Заметим также, что для написания формулы нам потребовалось математическое понятие *упорядоченное множество*.

И последнее, что мы отметим, - мы приняли на веру тот интуитивно очевидный факт, что, прикладывая один эталон к другому, мы достигнем конца доски. В дальнейшем попробуем в этом усомниться и посмотреть, к чему это приведет.

Подводя итоги нулевого этапа измерений, можно сказать, что длина доски больше k_0 метров и меньше $k_0 + 1$. Может, конечно, повезти, и длина будет ровно k_0 метров, на этом наш увлекательный процесс закончится. В общем же случае,

$$L = k_0 + \Delta_1,$$

кусок доски, длина которого меньше метра.

Этап 1.

Немного упростим себе жизнь и будем считать, что мы умеем точно распиливать эталон пополам. Другими словами, у нас есть эталон $1/2, 1/4, \dots 1/1024, \dots$ метра. Заметим срузу, что мы ввели, таким образом, понятие *рационального числа*. Рациональное число - это отношение двух целых чисел. Рациональные числа можно не только складывать и вычитать, но и умножать и делить, причем, умножение и сложение согласованы определенным образом. Такой объект называется полем. Таким образом, на втором этапе измерений мы работаем не с группой целых чисел, а с *полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$. Теперь проделаем процедуры этапа 0, но для доски Δ_1 и эталоном полуметра. Получим соотношение

$$1/2k_1 \leq \Delta_1 < 1/2k_1 + 1/2,$$

$$L = k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \Delta_2,$$

где Δ_2 - доска длины меньше чем полметра. Заметим, что, поскольку длина обрезка Δ_1 меньше метра, то k_1 либо 0, либо 1.

Этап n.

$$L = k_0 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{4} + \dots + \frac{k_n}{2^n} + \Delta_{n+1}.$$

Процесс, вообще говоря, может никогда не остановиться. Но, в какой-то момент, мы будем считать, что обрезок Δ_{n+1} достаточно маленький.

Что значит достаточно? С точки зрения физики, это 10^{-13} м - предел точности самого эталона. С точки зрения математической физики - ограничения пока нет.

Попытаемся понять, что значит маленький. Математическое понятие - *норма рационального числа.* Нормой называется отображение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в множество неотрицательных рациональных чисел,$q \to |q|$, обладающее свойствами

1. $|0| = 0$,
2. $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$,
3. $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$.

Понятие нормы и, соответственно, малости, позволяет ввести понятие "хороших"(фундаментальных) последовательностей. Последовательность рациональных чисел $\{q_n \; n = 1, 2, \dots\}$ называется *фундаментальной*, если, начиная с некоторого достаточно большого номера, норма разности $|q_n - q_m|$ меньше любого наперед заданного числа.

Фундаментальные последовательности хороши тем, что с ними можно работать как с обычными числами - складывать, вычитать, умножать и делить. Рациональным числам при этом соответствуют конечные фундаментальные последовательности. Процедура добавления к рациональным числам всех фундаментальных последовательностей называется *пополнением поля рациональных чисел по норме.*

Таким образом, процесс измерения доски можно вообще не останавливать. Тогда, вообще говоря, результатом измерения будет фундаментальная последовательность рациональных чисел (если повезет - то рациональное число).

Приведем пример нормы. Пусть q - рациональное число. Тогда, если q - положительное, то $|q| = q$, если же q - отрицательное, то $|q| = -q$. (Обычное абсолютное значение)

Задача. Доказать, что это норма.

Пополнение поля рациональных чисел по этой норме есть поле действительных чисел $\mathbb{R}$.

Подводя итоги первого часа, напомним математический багаж, который мы приобрели.

- Группа целых чисел $\mathbb{Z}$

- Упорядоченное множество
- Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$
- Норма
- Пополнение по норме
- Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$

3 Квантовая доска

Напомним, что ранее мы приняли на веру тот интуитивно очевидный факт, что, прикладывая один эталон к другому, мы достигнем конца доски. Тем не менее, это совершенно определенное предположение об устройстве пространства, а именно, аксиома Архимеда. Для нашего случая она звучит так: если даны два отрезка, то отложив достаточное количество раз меньшего из них, можно покрыть больший. Эту аксиому еще называют аксиомой измеримости.

Какие у нас есть основания, чтобы усомниться в справедливости аксиомы Архимеда?

Первое основание довольно банальное. Как уже отмечалось, точность современных эталонов длины обеспечивает измеримость до расстояний 10^{-13} м. Что делать, если необходимо работать с меньшими длинами?

Можно было бы возразить, что развитие технологии позволит улучшить до любых пределов качество эталонов. Однако, существует принципиальный предел - Планковская длина 10^{-35} м. Существование этого принципиального предела измеримости следует из квантовой гравитации. Попробую это пояснить.

Современный эталон метра выглядит следующим образом: длина одного метра в настоящий момент установлена равной пути, проходимому светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды. Это означает, что если мы хотим иметь эталон точности Δx, мы должны уметь определять координату частицы с этой точностью. В соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга, это означает, что в пучке фотонов, используемых для определения координаты частицы с точностью Δx неизбежно присутствуют фотоны с импульсом, большим чем $h/\Delta x$ (и, соответственно, энергией, большей чем $ch/\Delta x$). Это следствие из фундаментального принципа квантовой механики пока не создает принципиальных ограничений для создания эталона длины сколь угодно большой точности. Однако, для этого потребуется использовать частицы со сколь угодно большой энергией.

Добавим теперь в нашу схему общую теорию относительности Эйнштейна. В соответствии с ОТО, в присутствии частиц с массой (энергией) пространство перестает быть плоским. Чем выше энергия частицы, тем выше кривизна пространства. Это вносит свои коррективы в процесс измерения и приводит к весьма интригующему результату. Если мы верим в справедливость квантовой механики и ОТО (теории, имеющие блестящие экспериментальные подтверждения), то существует абсолютный предел измеримости - Планковская длина.

Это приводит к абсолютно новым представлениям о структуре пространства на субпланковских масштабах. Одна из идей (И.В. Волович) - аксиома Архимеда не выполняется, т.е. пространство неархимедово.

4 p-Адические числа.

Попробуем перевести эту идею на язык математических утверждений. Из нашего приобретенного математического багажа хотелось бы сохранить рациональные числа и понятие нормы.

Ранее мы рассмотрели в качестве примера одну норму на поле рациональных чисел. Оказывается, есть и другие. Выберем простое число p и представим рациональное число q в виде $q = p^{\gamma} m/n$, где целые числа m и n не делятся на p. Легко заметить, что это можно сделать единственным образом. Определим p-адическую норму числа q по формуле $|q|_p = p^{-\gamma}$.

Задача. Проверить, что выполняются аксиомы нормы.

Легко заметить, что нормы любого целого числа меньше или равна 1. Следовательно, сколько бы мы не брали эталонов p-адической длины 1, суммарная их длина будет меньше 1. Аксиома Архимеда не выполняется. Выполнив процедуру пополнения по этой норме, получим поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Поле p-адических чисел обладает весьма экзотической геометрией. Основа всей экзотики - справедливость более сильного неравенства, чем неравенство треугольника. А именно, $|q_1 + q_2|_p \leq \max\{|q_1|_p, |q_2|_p\}$.

Задача. Доказать сильное неравенство треугольника.

В качестве демонстрации необычных свойств p-адической геометрии, докажем такое утверждение. *Любая точка шара является его центром.*

Действительно, пуссть B_0 - шар с центром в нуле, а B_a - шар с центром в a и $|a|_p \leq 1$. Если $x \in B_0$, т.е. $|x|_p \leq 1$, то $|x-a|_p \leq 1$ и, следовательно, $x \in B_a$, т.е. $B_0 \subset B_a$. Обратно, пусть $x \in B_a$. Предположим, что $|x|_p > 1$. Тогда $1 < |x|_p = |x-a+a|_p \leq \max\{|x-a|_p, |a|_p\} \leq 1$. Полученное противоречие показывает, что $x \in B_0$ и, следовательно,$B_a \subset B_0$.

Из доказанного немедленно следует, что *два шара одинакового радиуса либо не пересекаются, либо совпадают.*

Стоит заметить, что p-адические числа являются стандартным инструментом в теории чисел, гипотеза о неархимедовой природе пространства на субпланковских масштабах возникла в конце 80-х.

Самое любопытное, что у нас не такой уж большой выбор. Оказывается (теорема Островского), на поле рациональных чисел существует абсолютное значение, семейство p-адических норм, и других норм не существует.

Это чисто математическое утверждение. Какие физические законы оно отражает? Ответом на этот вопрос будет построение теории, которая будет неархимедовой на субпланковских масштабах, и перейдет в привычную архимедову на больших масштабах.