Задача распада разрыва для магнитной гидродинамики на ровной границе в приближении мелкой воды

Тарасевич С. В., ИКИ РАН

Москва, 2011

Содержание

- Применение приближения мелкой воды для магнитной гидродинамики
- Уравнения МГД мелкой воды
- Непрерывные частные решения
- Разрывные частные решения
- Постановка задачи распада разрыва
- Возможные волновые конфигурации
- Условия реализации конфигураций
- Результаты и выводы

Применение приближения МГД мелкой воды

Вертикальные ускорения в слое жидкости много меньше силы тяжести

- Нейтронные звёзды
- Солнечный тахоклин
- Производство алюминия

Получение уравнений мелкой воды

- Система уравнений МГД в поле силы тяжести
- Ось z антиколлинеарна вектору силы тяжести
- Гидростатичность распределения давлений
- Малость отклонения горизонтальных составляющих скорости и магнитного поля от средних по глубине значений

- Интегрирование уравнений по глубине

- Применение
- **Получение уравнений**
- Непрерывные решения
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

Система уравнений

Одномерный случай

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h u_1}{\partial t} + \; c_g^2 - u_1^2 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h u_2}{\partial t} + \; B_1 B_2 - u_1 u_2 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial h u_2}{\partial x} - B_1 \dfrac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial h B_2}{\partial t} = \; u_2 B_1 - u_1 B_2 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + B_2 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} - B_1 \dfrac{\partial h u_2}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0$$

h – *глубина жидкости*
u_1, u_2 – *скорость жидкости*
B_1, B_2 – *приведённая напряжённость магнитного поля*
$c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$ – *скорость распространения малых возмущений*
x – *пространственная координата*
t – *временная координата*

Инварианты Римана

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \ u_1 + c_g \ \frac{\partial r}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \ u_1 - c_g \ \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \ u_1 - B_1 \ \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \ u_1 + B_1 \ \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_1 h}{\partial t} = 0$$

$$r = u_1 + \varphi \ \ h$$

$$s = u_1 - \varphi \ \ h$$

$$p = u_2 + B_2$$

$$q = u_2 - B_2$$

$$c_g = \sqrt{B_1^2 + gh} \qquad \varphi \ \ h \ \ = \int \frac{c_g}{h} dh$$

Волны Римана

Альфвеновские волны

$$r = const, s = const, p = const$$

$$u_2(x,t) + B_2(x,t) = u_2(x,0) + B_2(x,0)$$

$$u_1(x,t) = u_1(x,0)$$

$$B_1(x,t) = B_1(x,0)$$

$$h(x,t) = h(x,0)$$

$$u_2(x,t) - B_2(x,t) = u_2(x,0) - B_2(x,0)$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + B_1$

$$r = const, s = const, q = const$$

$$u_2(x,t) - B_2(x,t) = u_2(x,0) - B_2(x,0)$$

$$u_1(x,t) = u_1(x,0)$$

$$B_1(x,t) = B_1(x,0)$$

$$h(x,t) = h(x,0)$$

$$u_2(x,t) + B_2(x,t) = u_2(x,0) + B_2(x,0)$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - B_1$

- Применение
- Получение уравнений
- **Непрерывные решения**
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

Волны Римана

Магнитогравитационные волны

Волна, бегущая влево

$$r = const, q = const, p = const$$

$$u_1(x,t) + \varphi(h(x,t)) = u_1(x,0) + \varphi(h(x,0))$$

$$u_2(x,t) = u_2(x,0)$$

$$B_2(x,t) = B_2(x,0)$$

$$B_1(x,t)\,h(x,t) = B_1(x,0)\,h(x,0)$$

$$u_1(x,t) - \varphi(h(x,t)) = u_1(x,0) - \varphi(h(x,0))$$

вдоль характеристик $\dfrac{dx}{dt} = u_1 - c_g$

Волна, бегущая вправо

$$s = const, q = const, p = const$$

$$u_1(x,t) - \varphi(h(x,t)) = u_1(x,0) - \varphi(h(x,0))$$

$$u_2(x,t) = u_2(x,0)$$

$$B_2(x,t) = B_2(x,0)$$

$$B_1(x,t)\,h(x,t) = B_1(x,0)\,h(x,0)$$

$$u_1(x,t) + \varphi(h(x,t)) = u_1(x,0) + \varphi(h(x,0))$$

вдоль характеристик $\dfrac{dx}{dt} = u_1 + c_g$

Волны Римана

Магнитогравитационные волны

- Применение
- Получение уравнений
- **Непрерывные решения**
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

$$r = const, q = const, p = const$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(r_0 + s\right) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$r_0 = u_1 + \varphi \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial x} < 0$$ *волна разрежения*

$$\frac{\partial s}{\partial x} < 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial x} > 0$$ *волна сжатия*

$$s = const, q = const, p = const$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(r + s_0\right) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$s_0 = u_1 - \varphi \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial x} > 0$$ *волна разрежения*

$$\frac{\partial r}{\partial x} < 0 \qquad \frac{\partial h}{\partial x} < 0$$ *волна сжатия*

Волны Римана

Автомодельные решения

Магнитогравитационная волна разрежения, бегущая влево

$$r = const, q = const, p = const$$

$$u_1 \;\; x,t \;\; +\varphi \;\; h \;\; x,t \;\;\; = u_1 \;\; x,0 \;\; +\varphi \;\; h \;\; x,0$$

$$u_2 \;\; x,t \;\; = u_2 \;\; x,0$$

$$B_2 \;\; x,t \;\; = B_2 \;\; x,0$$

$$B_1 \;\; x,t \;\; h \;\; x,t \;\; = B_1 \;\; x,0 \;\; h \;\; x,0$$

$$u_1 \;\; x,t \;\; -\varphi \;\; h \;\; x,t \;\;\; = u_1 \;\; x_0,0 \;\; -\varphi \;\; h \;\; x_0,0$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 - c_g$

выходящих из точки $x_0, 0$

Магнитогравитационная волна разрежения, бегущая вправо

$$s = const, q = const, p = const$$

$$u_1 \;\; x,t \;\; -\varphi \;\; h \;\; x,t \;\;\; = u_1 \;\; x,0 \;\; -\varphi \;\; h \;\; x,0$$

$$u_2 \;\; x,t \;\; = u_2 \;\; x,0$$

$$B_2 \;\; x,t \;\; = B_2 \;\; x,0$$

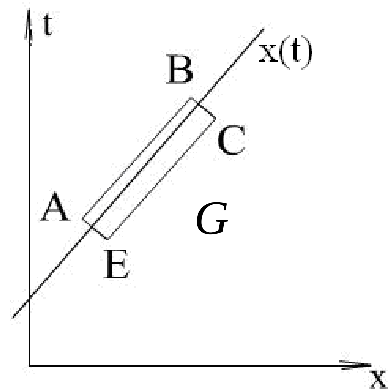
$$B_1 \;\; x,t \;\; h \;\; x,t \;\; = B_1 \;\; x,0 \;\; h \;\; x,0$$

$$u_1 \;\; x,t \;\; +\varphi \;\; h \;\; x,t \;\;\; = u_1 \;\; x_0,0 \;\; +\varphi \;\; h \;\; x_0,0$$

вдоль характеристик $\frac{dx}{dt} = u_1 + c_g$

выходящих из точки $x_0, 0$

Разрывные решения



$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hu_1}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial hu_1}{\partial t} + \dfrac{\partial \;\; hu_1^2 - hB_1^2 + 1/2gh^2}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial hu_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \;\; hu_1u_2 - hB_1B_2}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial hB_1}{\partial t} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial hB_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \;\; hu_1B_2 - hB_1u_2}{\partial x} = 0
\end{cases}
$$

$$\oint_{\partial G} hdx - (hu_1)dt = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hu_1)dx - (hu_1^2 - hB_1^2 + {}^{g}\!/_{2}\, h^2)dt = 0$$

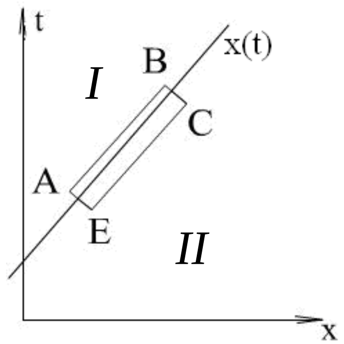
$$\oint_{\partial G} (hu_2)dx - (hu_1u_2 - hB_1B_2)dt = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_1)dx = 0$$

$$\oint_{\partial G} (hB_2)dx - (hu_1B_2 - hB_1u_2)dt = 0$$

- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- **Разрывные решения**
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

Разрывные решения



$$D = D(t) = x'(t)$$

$$u_{1I}(t) = \lim_{x \to x(t)-0} u_1(x,t) \qquad u_{1II}(t) = \lim_{x \to x(t)+0} u_1(x,t)$$

$$u_{2I}(t) = \lim_{x \to x(t)-0} u_2(x,t) \qquad u_{2II}(t) = \lim_{x \to x(t)+0} u_2(x,t)$$

$$B_{1I}(t) = \lim_{x \to x(t)-0} B_1(x,t) \qquad B_{1II}(t) = \lim_{x \to x(t)+0} B_1(x,t)$$

$$B_{2I}(t) = \lim_{x \to x(t)-0} B_2(x,t) \qquad B_{2II}(t) = \lim_{x \to x(t)+0} B_2(x,t)$$

$$h_I(t) = \lim_{x \to x(t)-0} h(x,t) \qquad h_{II}(t) = \lim_{x \to x(t)+0} h(x,t)$$

$$\begin{cases} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g / 2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g / 2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{cases}$$

Разрывные решения

Альфвеновские волны

$$\begin{cases} Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\ Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g/2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g/2h_{II}^2 \\ Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\ Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\ Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II} \end{cases}$$

$$h_I = h_{II} \qquad u_{1I} = u_{1II} \qquad B_{1I} = B_{1II}$$

$$D = u_1 \pm B_1$$

$$B_{2I} - B_{2II} = \mp \; u_{2I} - u_{2II}$$

Разрывные решения

Магнитогравитационные волны

$$
\begin{cases}
Dh_I - h_I u_{1I} = Dh_{II} - h_{II} u_{1II} \\
Dh_I u_{1I} - h_I u_{1I}^2 + h_I B_{1I}^2 - g/2h_I^2 = Dh_{II} u_{1II} - h_{II} u_{1II}^2 + h_{II} B_{1II}^2 - g/2h_{II}^2 \\
Dh_I B_{1I} = Dh_{II} B_{1II} \\
Dh_I u_{2I} - h_I u_{1I} u_{2I} + h_I B_{1I} B_{2I} = Dh_{II} u_{2II} - h_{II} u_{1II} u_{2II} + h_{II} B_{1II} B_{2II} \\
Dh_I B_{2I} - h_I u_{1I} B_{2I} + h_I u_{2I} B_{1I} = Dh_{II} B_{2II} - h_{II} u_{1II} B_{2II} + h_{II} u_{2II} B_{1II}
\end{cases}
$$

$$B_{2I} = B_{2II}, u_{2I} = u_{2II}$$

$$h_I B_{1I} = h_{II} B_{1II}$$

$$D = \frac{h_I u_{1I} - h_{II} u_{1II}}{h_I - h_{II}}$$

$$u_{1I} - u_{1II} = \pm (h_I - h_{II}) \sqrt{\frac{g/2 (h_I + h_{II}) + (B_{1I} h_I)^2 / (h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$

- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- **Разрывные решения**
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

Разрывные решения

Тангенциальные разрывы

Для случая $B_1 \equiv 0$

$$h_I = h_{II} \quad u_{1I} = u_{1II} \quad B_{1I} = B_{1II} = 0$$

$$D = u_1$$

слева B_{2I}, u_{2I}

справа B_{2II}, u_{2II}

Для случая $B_1 \neq 0$ все величины непрерывны

Постановка задачи

- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- Разрывные решения
- **Постановка задачи**
- Возможные конфигурации
- Условия реализации
- Выводы

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial h u_1}{\partial t} + \; c_g - u_1 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + 2u_1 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial h u_2}{\partial t} + \; B_1 B_2 - u_1 u_2 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial h u_2}{\partial x} - B_1 \dfrac{\partial h B_2}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial h B_1}{\partial t} = 0 \\
\dfrac{\partial h B_2}{\partial t} = \; u_2 B_1 - u_1 B_2 \; \dfrac{\partial h}{\partial x} + B_2 \dfrac{\partial h u_1}{\partial x} - B_1 \dfrac{\partial h u_2}{\partial x} + u_1 \dfrac{\partial h B_2}{\partial x} = 0
\end{cases}
$$

$$
\frac{\partial h B_1}{\partial x} = 0
$$

$$
\begin{cases}
t = 0 \\
h = h_I, u_1 = u_{1I}, u_2 = u_{2I}, B_1 = B_{1I}, B_2 = B_{2I};\; x < 0 \\
h = h_{II}, u_1 = u_{1II}, u_2 = u_{2II}, B_1 = B_{1II}, B_2 = B_{2II};\; x > 0 \\
B_{1I} h_I = B_{1II} h_{II}
\end{cases}
$$

h – глубина жидкости
u_1, u_2 – скорость жидкости
B_1, B_2 – приведённая напряжённость магнитного поля
$c_g = \sqrt{B_1^2 + gh}$ – скорость распространения малых возмущений

Возможные волновые конфигурации

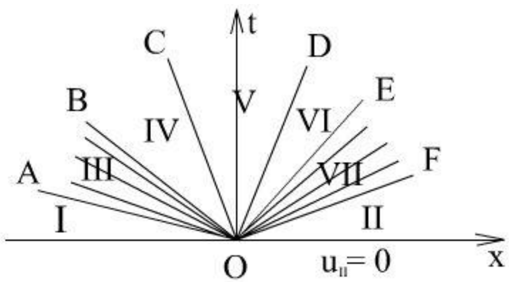
Выбор системы координат

- Глубина жидкости справа не превышает глубину жидкости слева

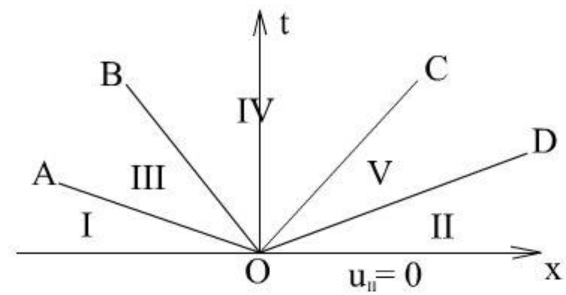
- Жидкость справа покоится

Возможные волновые конфигурации

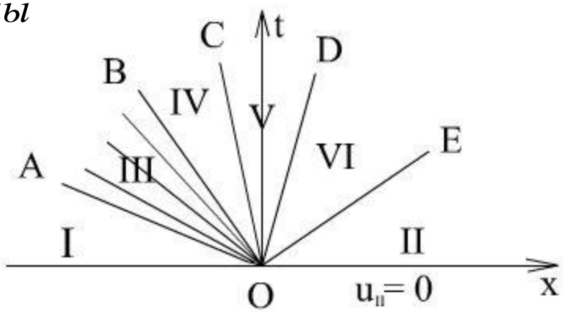
- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- **Возможные конфигурации**
- Условия реализации
- Выводы



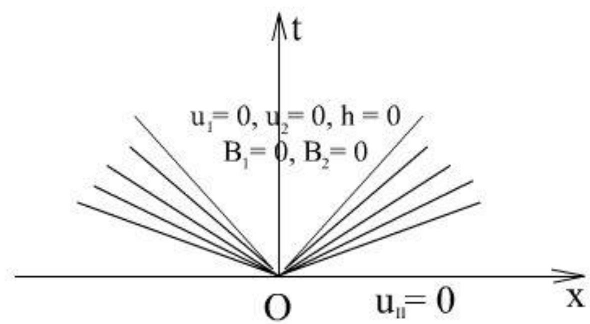
Две магнитогравитационные волны понижения уровня, две альфвеновские волны



Две магнитогравитационные ударные волны, две альфвеновские волны

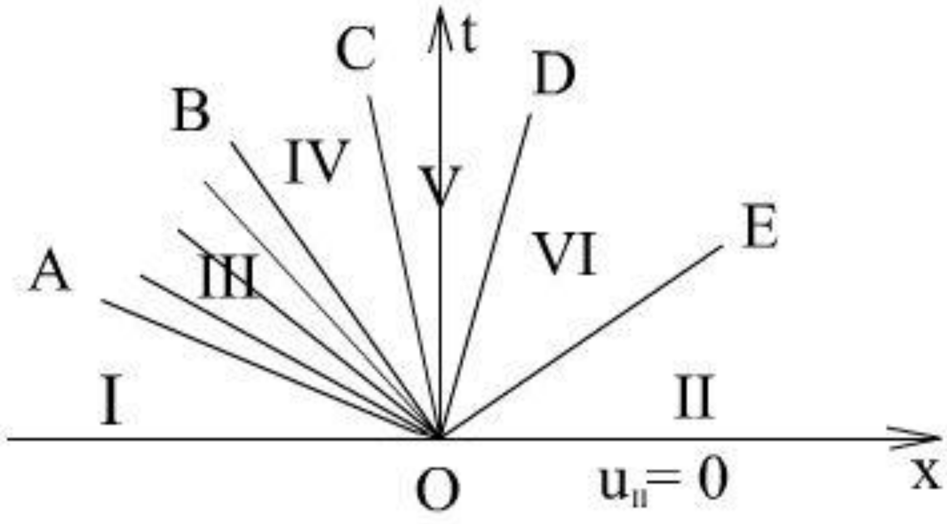


Магнитогравитационная волна понижения уровня, магнитогравитационная ударная волна, две альфвеновские волны



Две гидродинамические волны понижения уровня, зона вакуума

Условия реализации конфигураций

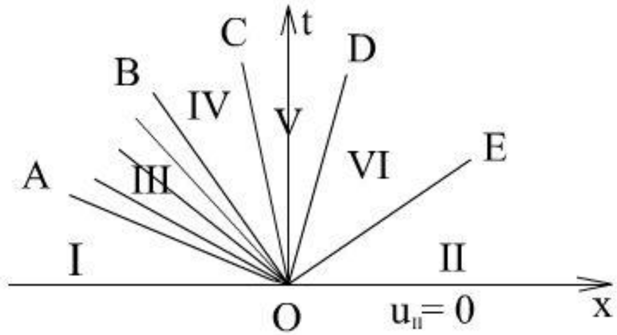


$$u_{1I} - c_{gI} \le u_{1IV} - c_{gIV} < u_{1IV} - |B_{1IV}| < u_{1IV} + |B_{1IV}| \le D$$

$$h_{II} \le h_{IV} \le h_{I}$$

- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- **Условия реализации**
- Выводы

Условия реализации конфигураций



$$h_{II} \le h_{IV} \le h_I$$

$$u_{1IV}^{(1)} = u_{1I} + \varphi(h_I) - \varphi(h_{IV})$$

$$u_{1IV}^{(2)} = -(h_{II} - h_{IV})\sqrt{\frac{g/2\,(h_{II} + h_{IV}) + (B_{1I}h_I)^2/(h_{II}h_{IV})}{h_{II}h_{IV}}}$$

Убывает по h_{IV}

Возрастает по h_{IV}

Для существования и единственности корня на отрезке $[h_{II}, h_I]$

$$u_{1IV}^{(1)}(h_{II}) \ge u_{1IV}^{(2)}(h_{II}) \qquad u_{1IV}^{(1)}(h_I) \le u_{1IV}^{(2)}(h_I)$$

$$\varphi(h_{II}) - \varphi(h_I) \le u_{1I} \le (h_I - h_{II})\sqrt{\frac{g/2\,(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2/(h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$

Условия реализации конфигураций

- Применение
- Получение уравнений
- Непрерывные решения
- Разрывные решения
- Постановка задачи
- Возможные конфигурации
- **Условия реализации**
- Выводы

Две ударные волны,
две альфвеновские волны

$$u_{1I} \geq (h_I - h_{II})\sqrt{\frac{(g/2)(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2/(h_I h_{II})}{h_I h_{II}}}$$

Ударная волна, волна понижения уровня,
две альфвеновские волны

$$\begin{cases} u_{1I} > \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I) \\ u_{1I} < (h_I - h_{II})\sqrt{\dfrac{(g/2)(h_I + h_{II}) + (B_{1I}h_I)^2/(h_I h_{II})}{h_I h_{II}}} \end{cases}$$

Две волны понижения уровня, две альфвеновские волны

$$u_{1I} \leq \varphi(h_{II}) - \varphi(h_I)$$

Две волны понижения уровня, зона вакуума

$$\begin{cases} B_{1I} = B_{1II} = 0 \\ u_{1I} < -2c_{gI} - 2c_{gII} \end{cases}$$

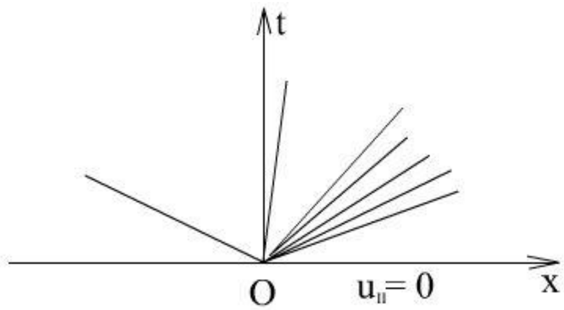
Результаты и выводы

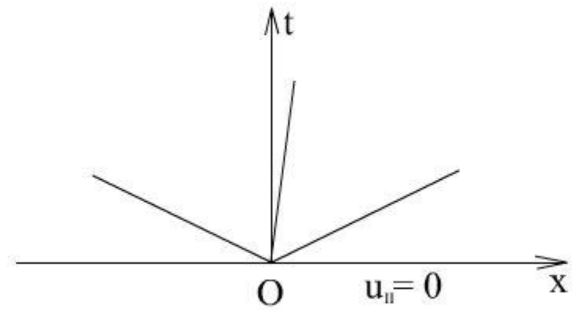
Получены частные решения уравнений магнитной гидродинамики в приближении мелкой воды: магнитогравитационные и альфвеновские волны.

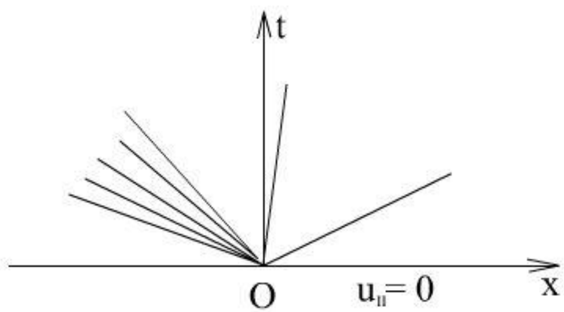
Найдено решение задачи распада разрыва в магнитной гидродинамике в приближении мелкой воды. Оно является суперпозицией двух альфвеновских волн и решения гидродинамической задачи распада разрыва с скоростью звука, соответствующей распространению слабых возмущений в МГД мелкой воде.

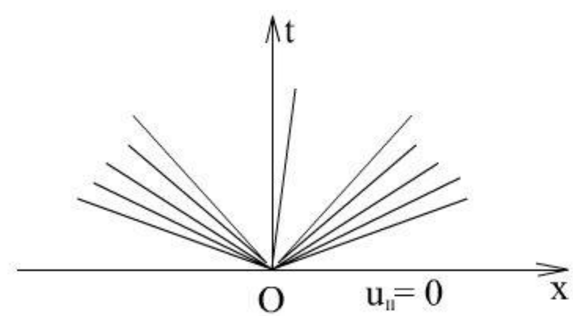
Спасибо за внимание

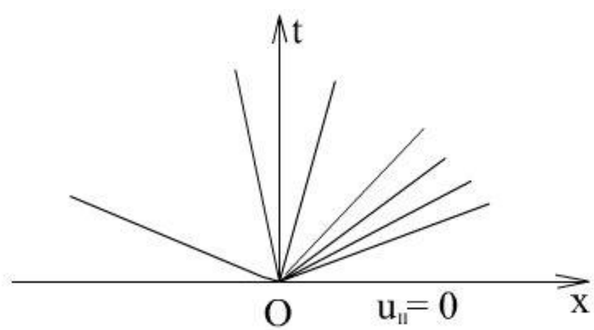
Конфигурации











$$u_{1I} - c_{gI} \le u_{1IV} - c_{gIV} < u_{1IV} - \left|B_{1IV}\right| < u_{1IV} + \left|B_{1IV}\right| \le D$$

$$u_{1I} - \varphi \;\; h_I \;\; = u_{1IV} - \varphi \;\; h_{IV}$$

$$\varphi \;\; h_I \;\; - c_{gI} \le \varphi \;\; h_{IV} \;\; - c_{gIV} \Rightarrow h_I \ge h_{IV}$$

$$h_I B_{1I} = h_{II} B_{1II}$$

$$D = \frac{h_I u_{1I} - h_{II} u_{1II}}{h_I - h_{II}}$$

$$u_{1I} - u_{1II} = \pm \;\; h_I - h_{II} \;\; \sqrt{\frac{g / 2 \;\; h_I + h_{II} \;\; + \;\; B_{1I} h_I \;\; ^2 / \;\; h_I h_{II}}{h_I h_{II}}}$$