

Задачи к лекции В.Ю.Протасова
“Три сюжета о теореме Хелли”
2 июля 2013

1. На плоскости лежат несколько прямоугольников (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.
2. Если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покроют всю плоскость.
3. Докажите Теорему о трансверсали:
На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трёх отрезков найдётся прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.
4. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Если для любых трёх отрезков существует парабола $y = x^2 + px + q$, которая их пересекает, то найдётся такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.
5. Докажите теорему Минковского-Радона в \mathbb{R}^d .
6. Докажите, что для любого треугольника $\gamma = 2$, а для любого тетраэдра $\gamma = 3$.
7. Вычислите константу Минковского-Радона
 - а) для трапеции со сторонами 1, 1, 1 и 2;
 - б) для прямого кругового конуса;
 - в) для правильной треугольной призмы.
8. Приведите пример плоской фигуры, у которой $\gamma = \frac{3}{2}$.
- 9*. Если для плоской фигуры $\gamma = 2$, то это – треугольник. Если для выпуклого тела в \mathbb{R}^3 $\gamma = 3$, то это – тетраэдр.
10. Докажите неравенство Юнга в \mathbb{R}^d .
11. На плоскости дано конечное семейство прямых. Известно, что любые три прямые можно пересечь кругом радиуса r . Тогда все прямые семейства можно пересечь кругом радиуса r .
12. Докажите, что внутри ограниченной выпуклой фигуры всегда найдётся точка, обладающая следующим свойством: любая прямая, проходящая через эту точку делит площадь фигуры на части, отношение которых не превосходит 2.
13. При каком наименьшем n любой плоский несамопересекающийся многоугольник – звездный.

Дополнительная Литература

- [1] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Перев. с англ., Москва, Мир, 1968, 159 стр.
Можно скачать по ссылке: <http://www.twirpx.com/file/589826/>
- [2] В.Ю. Протасов, *Теорема Хелли и вокруг нее*, Квант, No 3 (2009), стр. 8-14.
Можно скачать по ссылке: www.geometry.ru/articles/protasov_helly.pdf
- [3] В.М. Тихомиров, *Геометрия выпуклости*, Квант, No 4 (2003), стр. 2—9.
Можно скачать по ссылке: <http://kvant.mccme.ru/2003/04/index.htm>

В.Ю. Протасов, проф., д.ф.-м.н.
кафедра Общих проблем управления,
Механико-математический факультет
Московский Государственный Университет
Воробьевы Горы, Москва, 119992,
e-mail: v-protasov@yandex.ru