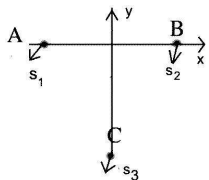


Задача 1 (А.В. Родин «Климат планет Солнечной системы»)

На планете X атмосфера состоит из чистого углекислого газа. Известно, что в тропосфере этой планеты всегда присутствует конвекция, а величина парникового эффекта составляет 50К. В результате столкновения с астероидом в атмосферу было выброшено много углекислого газа, и плотность атмосферы увеличилась в два раза. Определить, насколько изменилась температура поверхности.

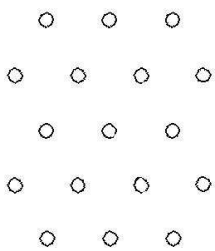
В указанных условиях теплопроводность газа не зависит от плотности.

Задача 2 (А.В. Михеенков «Фрустрация»)



В вершинах равностороннего треугольника A, B, C находятся три спина $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ соответственно. Причем модули $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ равны: $|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2| = |\vec{s}_3|$. Энергия взаимодействия спинов определяется через скалярное произведение и имеет вид

$$U = a(\vec{s}_1 \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \vec{s}_1), \tag{1}$$



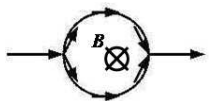
где $a > 0$ – некоторая константа, характеризующая взаимодействие спинов.

а) Найдите условие, связывающее направления спинов $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, при котором система принимает минимально возможное значение энергии.

б) Предположим спин \vec{s}_3 лежит на оси y (ось y перпендикулярна AB) (см. рис.). Нарисуйте все возможные комбинации спинов $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, соответствующих минимальному значению энергии системы.

в) Допустим, имеется бесконечная плоская треугольная решетка с постоянным расстоянием между ближайшими соседями равным c , в вершинах которой находятся спиновые векторы, равные по модулю. Предположим для любых трех ближайших спинов, находящихся в вершинах данной решетки, выполняется условие минимальности энергии их взаимодействия. Нарисуйте какой-нибудь из возможных вариантов картины направления спинов в получившейся системе с учетом упомянутого выше условия. На какое наименьшее расстояние нужно сдвинуть решетку, чтобы она приняла свой исходный вид, то есть в каждом ее узле окажутся те же спиновые векторы, что и до сдвига?

Задача 3 (Э.В. Девятков «Квантовые интерферометры нового типа»)



Твёрдотельный интерферометр на электронах имеет круглую петлю, которую электроны могут обходить с двух сторон (см. рис.). Через петлю проходит магнитное поле. Используемое оборудование позволяет менять его с шагом 2×10^{-3} Тл. Оцените максимальный размер петли, который позволит наблюдать в эксперименте интерференцию электронов при изменении поля.

$$\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек.} \quad e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ Кл}$$

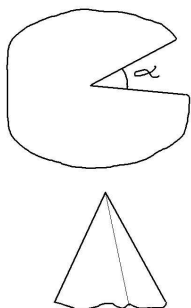
Указание: Из-за присутствия магнитного поля возникает разность фаз у электронной волны, прошедшей по нижней и по верхней части петли (эффект Ааронова-Бома). «Оптический» ход волны (набег фазы волны) есть kl на верхней половине петли, где l – расстояние пройденное волной, и $-kl$ на нижней, k – модуль волнового вектора. В магнитном поле принять $k = x/l_B^2$, $l_B = (\hbar/eB)^{1/2}$ – магнитная длина, x – радиус петли.

Задача 4 (М.А. Капустин «Загадка тепла и работы...»)

Найти теплоемкость подсистемы ядерных магнитных моментов с учетом их вкладов в общее магнитное поле. Внешнее магнитное поле постоянно и равно B_0 . Магнитный момент ядра μ , причем возможны всего два его положения: по полю и против поля. Температуру считать достаточно большой.

Указания. Выражение «достаточно большая температура» означает, что характерная тепловая энергия kT существенно больше характерной магнитной энергии μB . Каждый магнитный момент ядра можно условно представить в виде витка с током по формуле $\mu = IS$, где I — сила тока, а S — площадь витка. Суммарное магнитное поле складывается из внешнего поля и поля, наводимого «током» диполей. Средняя энергия двухуровневой системы: $\langle E \rangle = \frac{E_1 e^{-\frac{E_1}{kT}} + E_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}} + e^{-\frac{E_2}{kT}}}$.

Задача 5 (М.Г. Иванов) (А.В. Омельченко «Геометрия и физика — от Римана до Перельмана»)



Геометрия пространства вблизи *космологической струны* устроена следующим образом: из обычного евклидова трёхмерного пространства вырезается клин (двухгранный угол), ограниченный двумя полуплоскостями, угол между которыми α — «угловой дефицит». Часть пространства, ограниченная клином, выкидывается. Полуплоскости отождествляются друг с другом. Геометрия пространства кроме ребра клина при этом считается прежней. Описанная процедура является 3-мерным аналогом склеивания поверхности конуса из плоского листа бумаги, который при этом не сжимается и не растягивается, а только изгибается, что не влияет на длины нарисованных на нём отрезков.

Точечный наблюдатель находится рядом с космологической струной. Лучи света распространяются по прямым, причём струна поглощает падающие на неё лучи.

- При каких значениях α наблюдатель сможет увидеть себя со стороны?
- Определите зависимость от угла α числа своих изображений, которые сможет увидеть наблюдатель.

Задача 6 (Н.П. Долбилин «Теорема Минковского о выпуклых многогранниках...»)

Ежом многогранника называется набор векторов число которых совпадает с числом граней, каждый вектор перпендикулярен соответствующей грани и направлена наружу, длина каждого вектора численно равна площади грани.

Сумма Бляшке двух выпуклых многогранников — это выпуклый многогранник, ёж которого получается объединением ежей каждого из слагаемых. Объединение ежей состоит из всех векторов обоих ежей, при условии, что они не совпадают по направлениям. Сонаправленные векторы разных ежей заменяются их суммой.

Сумма Бляшке имеет столько же граней, сколько оба слагаемых вместе взятые. Каждой грани суммы соответствует какая-то грань одного из слагаемых, причём соответствующие грани равны по площади и параллельны друг другу.

Правильный тетраэдр (4-гранник) вписывается в единичный куб двумя способами (вершины тетраэдра совпадают с вершинами куба).

Какая геометрическая фигура будет суммой Бляшке этих тетраэдров?

Каков объём этой фигуры?

Задача 7 (Н.П. Долбилин «Теорема Минковского о выпуклых многогранниках...»)

Ежом многогранника называется набор векторов число которых совпадает с числом граней, каждый вектор перпендикулярен соответствующей грани и направлена наружу, длина каждого вектора численно равна площади грани.

Параллелоэдром называется многогранник, параллельным переносом которого можно заполнить пространство. Ёж некоторого параллелоэдра в 3-мерном пространстве представляет из себя 6 векторов, которые лежат на 3 попарно перпендикулярных прямых. Каждая пара векторов, лежащая на одной прямой, имеет одинаковую длину и противоположна по направлению. Длины этих векторов равны числам a , b и c .

Найдите объём этого параллелоэдра.