1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+11x+23$.

Ответ: 22.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4}+11x+23>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+2)(x-46)>0$, откуда $-2<x<46$. На этом промежутке существует 45 натуральных значений x: $x=1, x=2,\ldots, x=45$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 22 возможности. Итак, получаем 22 точки, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geq 1+\sqrt{x+1}$.

Ответ: $x \in (0;1]$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \geq 0$, $1-\sqrt{x+1} \neq 0$, откуда получаем, что $x>0$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{x}-2 \leq 1-(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2-x \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x \leq 4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \in (-\infty;1] \cup [4;+\infty), \end{cases}$$

откуда $x \leq 1$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in (0;1]$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 13122.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1=13122$ способа.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-1|+\frac{x^2-7x+12}{3-x}=0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Решение. При условии $x \neq 3$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x-1|=x-4$. График правой части уравнения – прямая $y=x-4$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(1;0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a.

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a<-1$, правая ветвь пересекает прямую при $a<1$ и $a \neq -\frac{1}{2}$ (при $a=-\frac{1}{2}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(3;-1)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};1\right)$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\frac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{19}{4};\frac{17}{8}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2y}=u$, $x-2y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=\frac{7}{2}, \\ u^2v+u^2=\frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{7}{2}-u, \\ u^2\left(\frac{7}{2}-u\right)+u^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3-9u^2+27=0$. Подбирая целый корень $u=3$ и выделяя множитель $(u-3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-3)\left(2u^2-3u-9\right)=0$, откуда $u=3$ или $u=-\frac{9}{2}$. Значение $u=-\frac{9}{2}$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x+2y=9, \\ x-2y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{19}{2}, \\ 4y=\frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{19}{4}, \\ y=\frac{17}{8}. \end{cases}$$

6. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABC с углом 120° при вершине C . В треугольники AKC и BKC вписаны окружности с центрами O и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OQC , если $OK=6$, $KQ=7$.

Ответ: $\sqrt{\frac{85}{3}}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи KO и KQ являются биссектрисами углов AKC и BKC . Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle OKQ=90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $OQ=\sqrt{OK^2+KQ^2}=\sqrt{85}$.

Так как CO и CQ – биссектрисы углов ACK и BCK , то

$$\angle OCQ=\angle OCK+\angle QCK=\frac{1}{2}\angle ACK+\frac{1}{2}\angle BCK=\frac{1}{2}\angle BCA=60^\circ .$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника ADT находим, что искомый радиус равен $\frac{OQ}{2\sin\angle OCQ}=\sqrt{\frac{85}{3}}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x,y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+3x+\frac{253}{4}$.

Ответ: 11.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4}+3x+\frac{253}{4}>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+11)(x-23)>0$, откуда $-11<x<23$. На этом промежутке существует 22 натуральных значений x: $x=1, x=2, \ldots, x=22$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 11 возможностей. Итак, получаем 11 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{3-x}}\geq 1+\sqrt{3-x}$.

Ответ: $x\in[1;2)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x\leq 2$, $1-\sqrt{3-x}\neq 0$, откуда получаем, что $x<2$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{2-x}-2\leq 1-(3-x) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}\leq x \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\geq 0, \\ 2-x\leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty), \end{cases}$$

откуда $x\geq 1$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x\in[1;2)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6 или 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot 9\cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1=3645$ способов.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x+1|+\frac{x^2-5x+6}{2-x}=0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

Решение. При условии $x\neq 2$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x+1|=x-3$. График правой части уравнения – прямая $y=x-3$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(-1;0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a.

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a<-1$, правая ветвь пересекает прямую при $a<1$ и $a\neq-\frac{1}{3}$ (при $a=-\frac{1}{3}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(2;-1)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y+\sqrt{y-3x}+3x=12, \\ y^2+y-3x-9x^2=144. \end{cases}$

Ответ: $(-24;72), \left(-\frac{4}{3};12\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{y-3x}=u$, $y+3x=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=12, \\ u^2v+u^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=12-u, \\ u^2(12-u)+u^2=144. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-13u^2+144=0$. Подбирая целый корень $u=4$ и выделяя множитель $(u-4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-4)(u^2-9u-36)=0$, откуда $u=-3$, $u=4$ или $u=12$. Значение $u=-3$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=8$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=16, \\ y+3x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=24, \\ 6x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3}, \\ y=12. \end{cases}$$

При $u=12$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=144, \\ y+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=144, \\ 6x=-144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-24, \\ y=72. \end{cases}$$

6. Точка P лежит на стороне BC треугольника ABC с углом 60° при вершине A. В треугольники APB и APC вписаны окружности с центрами D и T соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADT, если $PD=7$, $PT=4$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи PT и PD являются биссектрисами углов CPA и BPA. Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle DPT=90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $DT=\sqrt{PD^2+PT^2}=\sqrt{65}$.

Так как AD и AT – биссектрисы углов BAP и CAP, то

$$\angle DAT=\angle DAP+\angle TAP=\frac{1}{2}\angle BAP+\frac{1}{2}\angle CAP=\frac{1}{2}\angle BAC=30^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника ADT находим, что искомый радиус равен $\frac{DT}{2\sin\angle DAT}=\sqrt{65}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+9x+19$.

Ответ: 18.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4}+9x+19>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+2)(x-38)>0$, откуда $-2<x<38$. На этом промежутке существует 37 натуральных значений x: $x=1, x=2, \ldots, x=37$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 18 возможностей. Итак, получаем 18 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x}-6}{2-\sqrt{x+4}} \geq 2+\sqrt{x+4}$.

Ответ: $x \in (0; 4]$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \geq 0$, $2-\sqrt{x+4} \neq 0$, откуда получаем, что $x>0$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{x}-6 \leq 4-(x+4) \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 6-x \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x \leq 36-12x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x^2-13x+36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x \in (-\infty; 4] \cup [9; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \leq 4$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in (0; 4]$.

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 1458$ способов.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|2-x|+\frac{x^2-x-6}{3-x}=0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in (-1; 1] \cup \{5\}$.

Решение. При условии $x \neq 3$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x-2|=x+2$. График правой части уравнения – прямая $y=x+2$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(2; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a.

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a>-1$, правая ветвь пересекает прямую при $a>1$ и $a \neq 5$ (при $a=5$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(3; 5)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in (-1; 1] \cup \{5\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5, \\ 4x^2+2x+3y-9y^2=32. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{17}{4}; \frac{5}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y}=u$, $2x-3y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2v+u^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u, \\ u^2(5-u)+u^2=32. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 6u^2 + 32 = 0$. Подбирая целый корень $u = -2$ и выделяя множитель $(u+2)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)\left(u^2 - 8u + 16\right) = 0$, откуда $u = -2$ или $u = 4$. Значение $u = -2$ не подходит. При $u = 4$ получаем $v = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 17, \\ 6y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{4}, \\ y = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

6. Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K. В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO, если $AO = 2$, $AF = 7$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{53}{3}}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами углов LAK и MAK. Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle FAO = 90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $FO = \sqrt{FA^2 + OA^2} = \sqrt{53}$.

Так как KF и KO – биссектрисы углов LKA и MKA, то

$$\angle FKO = \angle FKA + \angle OKA = \frac{1}{2}\angle LKA + \frac{1}{2}\angle MKA = \frac{1}{2}\angle LKM = 60^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника FKO находим, что искомый радиус равен $\dfrac{FO}{2\sin\angle FKO} = \sqrt{\dfrac{53}{3}}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{4}+5x+39$.

Ответ: 12.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4}+5x+39>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+6)(x-26)>0$, откуда $-6<x<26$. На этом промежутке существует 25 натуральных значений x: $x=1, x=2, \ldots, x=25$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 12 возможностей. Итак, получаем 12 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x}-12}{1-\sqrt{2-x}} \geq 1+\sqrt{2-x}$.

Ответ: $x \in [-8; 1)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \leq 1$, $1-\sqrt{2-x} \neq 0$, откуда получаем, что $x<1$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{1-x}-12 \leq 1-(2-x) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \leq 11+x \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 11+x \geq 0, \\ 1-x \leq 121+22x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11, \\ x^2+23x+120 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11, \\ x \in (-\infty; -15] \cup [-8; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \geq -8$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in [-8; 1)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 26244.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 2, 4, 6 или 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 26244$ способов.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|2+x|+\frac{x^2+x-12}{x+4}=0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in (-1; 1] \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Решение. При условии $x \neq -4$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x+2|=3-x$. График правой части уравнения – прямая $y=x-3$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(-2; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a.

Правая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a>-1$, левая ветвь пересекает прямую при $a>1$ и $a \neq \frac{7}{2}$ (при $a=\frac{7}{2}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(-4; 7)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in (-1; 1] \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+\sqrt{3x-y}+y=6, \\ 9x^2+3x-y-y^2=36. \end{cases}$

Ответ: $(2; -3), (6; -18)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3x-y}=u$, $3x+y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=6, \\ u^2v+u^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-u, \\ u^2(6-u)+u^2=36. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-7u^2+36=0$. Подбирая целый корень $u=-2$ и выделяя множитель $(u+4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)(u^2-9u+18)=0$, откуда $u=-2$, $u=3$ или $u=6$. Значение $u=-2$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=3$. Тогда

$$\begin{cases} 3x-y=9, \\ 3x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-6, \\ 6x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-3. \end{cases}$$

При $u=6$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases} 3x-y=36, \\ 3x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-36, \\ 6x=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=-18. \end{cases}$$

6. Точка N лежит на стороне DE треугольника CDE с углом 60° при вершине C. В треугольники CNE и CDE вписаны окружности с центрами K и P соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKP, если $KN=8$, $NP=7$.

Ответ: $\sqrt{113}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи NK и NP являются биссектрисами углов ENC и DNC. Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle KNP=90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $KP=\sqrt{KN^2+PN^2}=\sqrt{113}$.

Так как CK и CP – биссектрисы углов ECN и DCN, то

$$\angle KCP=\angle KCN+\angle PCN=\frac{1}{2}\angle ECN+\frac{1}{2}\angle DCN=\frac{1}{2}\angle ECD=30^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника CKP находим, что искомый радиус равен $\dfrac{KP}{2\sin\angle KCP}=\sqrt{113}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(5) Решено неравенство $y > 0$ (или $y \geq 0$) .... ***2 балла,***

– сформулировано утверждение, что надо найти количество чётных натуральных чисел из полученного промежутка .... ***2 балла.***

2.(5) Неэквивалентное преобразование неравенства .... ***0 баллов за все последующие действия,***

– не учтено ОДЗ .... ***снять 2 балла.***

3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***

– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***

– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***

– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

4.(5) Не учтён случай, когда одна из ветвей графика $y = a|x - x_0|$ параллельна прямой .... ***снять 1 балл,***

– не учтён случай, когда одна из ветвей графика проходит через выколотую точку .... ***снять 1 балл.***

5.(6) Сделана замена переменных (как в решении) .... ***1 балл,***

– получено кубическое уравнение относительно одной из новых переменных .... ***1 балл,***

– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***

– получены посторонние решения .... ***снять 1 балл.***

6.(5) Доказано, что отрезок, соединяющий центры окружностей, виден из основания биссектрисы под прямым углом .... ***1 балл,***

– найден отрезок, соединяющий центры окружностей .... ***1 балл,***

– найден угол искомого треугольника, лежащий напротив отрезка, соединяющего центры окружностей .... ***1 балл.***

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+13x+42$.

Ответ: 13.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3}+13x+42>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+3)(x-42)>0$, откуда $-3<x<42$. На этом промежутке существует 41 натуральное значение x: $x=1, x=2, \ldots, x=41$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 13 возможностей. Итак, получаем 13 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-7x^2+7x=1$.

Ответ: 34.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$\left(x^3-1\right)-7\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)-7x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-6x+1\right)=0,$$

откуда $x=1$ или $x=3\pm\sqrt{8}$. Наибольший корень – это $a=3+\sqrt{8}$, наименьший – $b=3-\sqrt{8}$. Тогда

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}+\frac{3-\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}=\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^2+\left(3-\sqrt{8}\right)^2}{\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)}=\frac{2(9+8)}{1}=34.$$

3. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}{*}$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=5184$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases}(x-|x|)^2+(y-|y|)^2\le 4,\\ y+2x\le 0\end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $\frac{5+\pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x\ge0, y\ge0$ (первая четверть). Тогда $0\le4$, неравенству удовлетворяют все точки первой четверти.

2) $x<0, y\ge0$ (вторая четверть). Тогда $4x^2\le4$, $|x|\le1$; в этом случае x отрицателен, поэтому $x\ge-1$.

3) $x<0, y<0$ (третья четверть). Тогда $4x^2+4y^2\le4$, $x^2+y^2\le1^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0;0)$ радиуса 1 или внутри неё.

4) $x\ge0, y<0$ (четвёртая четверть). Тогда $4y^2\le4$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y\ge-1$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y=-2x$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение

– четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в третьей четверти (площадь $\frac{\pi}{4}$),

– треугольника с вершинами O, $A(-1;2)$, $B(-1;0)$ (площадь 1),

– треугольника с вершинами O, $C\left(\frac{1}{2};-1\right)$, $D(0;-1)$ (площадь $\frac{1}{4}$).

Значит, площадь множества равна $\frac{5+\pi}{4}$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};3\right)$, $\left(\sqrt[4]{\frac{21}{76}};2\cdot\sqrt[4]{\frac{84}{19}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, $\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv-2v-u+2=0, \\ 3v^4+u^4v^4=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2)=0, \\ 3v^4+u^4v^4=84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=1$ или $u=2$.

Если $v=1$, то $3+u^4=84$, откуда $u=3$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{1}{3}$, $y=uv=3$.

Если $u=2$, то $3v^4+16v^4=84$, откуда $v=\sqrt[4]{\frac{84}{19}}$; тогда $x=\frac{v}{u}=\sqrt[4]{\frac{21}{76}}$, $y=uv=2\cdot\sqrt[4]{\frac{84}{19}}$.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и T соответственно, причём $AK:KB=3:2$, $BT:TC=1:2$. Найдите AC, если $KT=\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $BK=2x$, $BT=y$; тогда $AK=3x$, $CT=2y$. По теореме о двух секущих $BK\cdot BA=BT\cdot BC$, откуда $2x\cdot 5x=y\cdot 3y$, $y=x\sqrt{\frac{10}{3}}$. Треугольники ABC и TBK подобны по двум сторонам и углу между ними ($BA:BT=BC:BK$, $\angle B$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{BC}{BK}=\frac{3y}{2x}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{10}{3}}=\sqrt{\frac{15}{2}}$. Значит, $AC=KT\cdot\sqrt{\frac{15}{2}}=3\sqrt{5}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 7x + 54$.

Ответ: 8.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 7x + 54 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+6)(x-27) > 0$, откуда $-6 < x < 27$. На этом промежутке существует 26 натуральных значений x: $x = 1, x = 2, \ldots, x = 26$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 8 возможностей. Итак, получаем 8 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 + 6x^2 + 6x = -1$.

Ответ: 23.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$\left(x^3 + 1\right) + 6\left(x^2 + x\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - x + 1\right) + 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 + 5x + 1\right) = 0,$$

откуда $x = -1$ или $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Наибольший корень – это $p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$, наименьший – $q = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$. Тогда

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{-5 - \sqrt{21}} + \frac{-5 - \sqrt{21}}{-5 + \sqrt{21}} = \frac{\left(-5 + \sqrt{21}\right)^2 + \left(-5 - \sqrt{21}\right)^2}{\left(-5 - \sqrt{21}\right)\left(-5 + \sqrt{21}\right)} = \frac{2(25 + 21)}{4} = 23.$$

3. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2160.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 6, 8$ (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2160$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} (|x| - x)^2 + (|y| - y)^2 \le 16, \\ 2y + x \le 0 \end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $5 + \pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x \ge 0, y \ge 0$ (первая четверть). Тогда $0 \le 16$, неравенству удовлетворяют все точки первой четверти. в этом случае x положителен, поэтому $x \le 2$.
2) $x < 0, y \ge 0$ (вторая четверть). Тогда $4x^2 \le 16$, $|x| \le 2$; в этом случае x отрицателен, поэтому $x \ge -2$.
3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \le 16$, $x^2 + y^2 \le 2^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 2 или внутри неё.
4) $x \ge 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4y^2 \le 16$, $|y| \le 2$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y \ge -2$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = -\frac{x}{2}$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение
– четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в третьей четверти (площадь π),
– треугольника с вершинами O, $A(-2; 1)$, $B(-2; 0)$ (площадь 1),
– треугольника с вершинами O, $C(4; -2)$, $D(0; -2)$ (площадь 4).

Значит, площадь множества равна $5+\pi$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} x-3\sqrt{xy}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+6=0, \\ x^2y^2+x^4=82. \end{cases}$

Ответ: $\left(3;\dfrac{1}{3}\right),\left(\sqrt[4]{66};\dfrac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, $\dfrac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv-3v-2u+6=0, \\ v^4+u^4v^4=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(u-3)=0, \\ v^4+u^4v^4=82. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=2$ или $u=3$.

Если $v=2$, то $16+16u^4=82$, откуда $u=\dfrac{\sqrt[4]{66}}{2}$; тогда $y=\dfrac{v}{u}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{66}}$, $x=uv=\sqrt[4]{66}$.

Если $u=3$, то $v^4+81v^4=82$, откуда $v=1$; тогда $y=\dfrac{v}{u}=\dfrac{1}{3}$, $x=uv=3$.

6. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает его стороны AC и BC в точках Q и N соответственно, причём $AQ:QC=5:2$, $CN:NB=5:2$. Найдите AB , если $QN=5\sqrt{2}$.

Ответ: $7\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $CQ=2x$, $CN=5y$; тогда $AQ=5x$, $CT=2y$. По теореме о двух секущих $CQ\cdot CA=CN\cdot CB$, откуда $2x\cdot 7x=5y\cdot 7y$, $y=x\sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Треугольники ABC и NQC подобны по двум сторонам и углу между ними ($CA:CN=CB:CQ$, $\angle C$ – общий), а коэффициент подобия равен $\dfrac{BC}{BQ}=\dfrac{7y}{2x}=\dfrac{7}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{7}{\sqrt{10}}$. Значит, $AB=QN\cdot\dfrac{7}{\sqrt{10}}=7\sqrt{5}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{3}+5x+72$.

Ответ: 7.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3}+5x+72>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+9)(x-24)>0$, откуда $-9<x<24$. На этом промежутке существует 23 натуральных значения x: $x=1, x=2, \ldots, x=23$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 7 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3-9x^2+9x=1$.

Ответ: 62.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$\left(x^3-1\right)-9\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)-9x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-8x+1\right)=0,$$

откуда $x=1$ или $x=4\pm\sqrt{15}$. Наибольший корень – это $a=4+\sqrt{15}$, наименьший – $b=4-\sqrt{15}$. Тогда

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4+\sqrt{15}}{4-\sqrt{15}}+\frac{4-\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^2+\left(4-\sqrt{15}\right)^2}{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}=\frac{2(16+15)}{1}=62.$$

3. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 864.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=864$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases}(|x|+x)^2+(|y|+y)^2\le 4,\\ 3y+x\le 0\end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: ∞.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x\ge 0, y\ge 0$ (первая четверть). Тогда $4x^2+4y^2\le 4$, $x^2+y^2\le 1^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0;0)$ радиуса 1 или внутри неё.
2) $x<0, y\ge 0$ (вторая четверть). Тогда $4y^2\le 4$, $|y|\le 1$; в этом случае y положителен, поэтому $y\le 1$.
3) $x<0, y<0$ (третья четверть). Тогда $0\le 4$. Этому неравенству удовлетворяют все точки третьей четверти.
4) $x\ge 0, y<0$ (четвёртая четверть). Тогда $4x^2\le 4$, $|x|\le 1$; в этом случае x положителен, поэтому $x\le 1$

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y=-\frac{x}{3}$ или ниже.

Площадь множества равна бесконечности (ему принадлежат все точки третьей четверти, а также некоторые точки второй и четвёртой четвертей).

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases}2x-\sqrt{xy}-4\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0,\\ 2x^2+x^2y^4=18y^2.\end{cases}$

Ответ: $(2;2), \left(\frac{\sqrt[4]{286}}{4}; \sqrt[4]{286}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, $\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 2uv-v-4u+2=0, \\ 2u^2v^2+\frac{v^6}{u^2}=\frac{18v^2}{u^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(2u-1)=0, \\ v^4+2u^4=18. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=2$ или $u=\frac{1}{2}$.

Если $v=2$, то $16+2u^4=18$, откуда $u=1$; тогда $y=\frac{v}{u}=2$, $x=uv=2$.

Если $u=\frac{1}{2}$, то $v^4+\frac{1}{8}=18$, откуда $v=\frac{\sqrt[4]{286}}{2}$; тогда $y=\frac{v}{u}=\sqrt[4]{286}$, $x=uv=\frac{\sqrt[4]{286}}{4}$.

6. Окружность проходит через вершины A и K треугольника AKT и пересекает его стороны AT и KT в точках C и N соответственно, причём $AC:CT=4:1$, $TN:NK=1:2$. Найдите AK, если $CN=\sqrt{10}$.

Ответ: $5\sqrt{6}$.

Решение. Пусть $CT=x$, $TN=y$; тогда $AC=4x$, $KN=2y$. По теореме о двух секущих $TC\cdot TA=TN\cdot TK$, откуда $x\cdot 5x=y\cdot 3y$, $y=x\sqrt{\frac{5}{3}}$. Треугольники AKT и CNT подобны по двум сторонам и углу между ними ($AT:NT=KT:CT$, $\angle T$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{AT}{NT}=\frac{5x}{y}=5\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{15}$. Значит, $AK=CN\cdot\sqrt{15}=5\sqrt{6}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 20x + 63$.

Ответ: 20.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 20x + 63 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+3)(x-63) > 0$, откуда $-3 < x < 63$. На этом промежутке существует 62 натуральных значения x: $x = 1, x = 2, \ldots, x = 62$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 20 возможностей. Итак, получаем 20 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 8x^2 + 8x = 1$.

Ответ: 47.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(x^3 - 1) - 8(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 8x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 7x + 1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$. Наибольший корень – это $p = \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$, наименьший – $q = \frac{7 - \sqrt{45}}{2}$. Тогда

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{7 + \sqrt{45}}{7 - \sqrt{45}} + \frac{7 - \sqrt{45}}{7 + \sqrt{45}} = \frac{\left(7 + \sqrt{45}\right)^2 + \left(7 - \sqrt{45}\right)^2}{\left(7 + \sqrt{45}\right)\left(7 - \sqrt{45}\right)} = \frac{2(49 + 45)}{4} = 47.$$

3. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 7, 8, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 8$ (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1728$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \le 16, \\ y - 3x \le 0 \end{cases}$ и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $\frac{20}{3} + \pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x \ge 0, y \ge 0$ (первая четверть). Тогда $4x^2 \le 16$, $|x| \le 2$; в этом случае x положителен, поэтому $x \le 2$.

2) $x < 0, y \ge 0$ (вторая четверть). Тогда $0 \le 16$, неравенству удовлетворяют все точки второй четверти.

3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4y^2 \le 16$, $|y| \le 2$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y \ge -2$.

4) $x \ge 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \le 16$, $x^2 + y^2 \le 2^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 2 или внутри неё.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = 3x$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение

– четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в четвёртой четверти (площадь π),

– треугольника с вершинами O, $A\left(-\frac{2}{3}; -2\right)$, $B(0; -2)$ (площадь $\frac{2}{3}$),

– треугольника с вершинами O, $C(2;0)$, $D(2;6)$ (площадь 6).

Значит, площадь множества равна $\frac{20}{3}+\pi$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} 3y-\sqrt{\frac{y}{x}}-6\sqrt{xy}+2=0, \\ x^2+81x^2y^4=2y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{\sqrt[4]{31}}{12};\frac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, $\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 3uv-u-6v+2=0, \\ \frac{v^2}{u^2}+81v^6u^2=2u^2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2)(3v-1)=0, \\ 1+81v^4u^4=2u^4. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u=2$ или $v=\frac{1}{3}$.

Если $u=2$, то $1+81\cdot16v^4=32$, откуда $v=\frac{\sqrt[4]{31}}{6}$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{\sqrt[4]{31}}{12}$, $y=uv=\frac{\sqrt[4]{31}}{3}$.

Если $v=\frac{1}{3}$, то $1+u^4=2u^4$, откуда $u=1$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{1}{3}$, $y=uv=\frac{1}{3}$.

6. Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF:FM=3:1$, $PB:BM=6:5$. Найдите KP, если $BF=\sqrt{15}$.

Ответ: $2\sqrt{33}$.

Решение. Пусть $FM=x$, $BM=5y$; тогда $KF=3x$, $BP=6y$. По теореме о двух секущих $MF\cdot MK=MB\cdot MP$, откуда $x\cdot4x=5y\cdot11y$, $y=\frac{2x}{\sqrt{55}}$. Треугольники KPM и BFM подобны по двум сторонам и углу между ними ($KM:BM=PM:FM$, $\angle M$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{PM}{FM}=\frac{11y}{x}=11\sqrt{\frac{4}{55}}=\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$. Значит, $KP=BF\cdot\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{33}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(5) Решено неравенство $y>0$ или $y\geq 0$ .... ***2 балла,***

– сформулировано утверждение, что надо найти количество кратных трём натуральных чисел из полученного промежутка .... ***2 балла.***

2.(4) Уравнение приведено к виду $(x-x_1)(x^2+ax+b)=0$ .... ***1 балл,***

– найдены все корни уравнения и других продвижений нет .... ***2 балла за всю задачу,***

– при решении использована теорема Виета для уравнения $x^2+ax+b=0$ и не доказано, что его корни являются наибольшим и наименьшим корнями исходного уравнения .... ***снять 1 балл.***

3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***

– за формулировки признаков делимости на 6 (на 15) .... ***баллы не добавляются,***

– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***

– ответ записан в виде $6^k\cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

4.(6) Построено множество точек, удовлетворяющих первому неравенству .... ***4 балла,***

– построено множество точек, удовлетворяющих второму неравенству .... ***1 балл,***

– найдена площадь .... ***1 балл.***

5.(6) Первое уравнение разложено на множители .... ***2 балла,***

– за каждый из двух полученных случаев .... ***2 балла.***

6.(5) Доказано подобие треугольников с общим углом .... ***2 балла,***

– вычислен отрезок .... ***3 балла.***

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y=-\frac{x^2}{9}+50$.

Ответ: 7.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{9}+50>0 \Leftrightarrow x^2<450$, откуда $-\sqrt{450}<x<\sqrt{450}$. На этом промежутке существует 21 натуральное значение x: $x=1, x=2, \ldots, x=21$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 7 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $8\left|x-\sqrt{x}+2\right|+2x\sqrt{x}<x^2+x+28$.

Ответ: $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D<0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$8\left(x-\sqrt{x}+2\right)<\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)+28 \Leftrightarrow 8\left(x-\sqrt{x}\right)+16<\left(x-\sqrt{x}\right)^2+28.$$

Обозначая $x-\sqrt{x}=t$, получаем $t^2-8t+12>0$, откуда $t\in(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$.

Если $t<2$, то $x-\sqrt{x}-2<0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<2 \Leftrightarrow 0\le x<4$.

Если $t>6$, то $x-\sqrt{x}-6>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}>3 \Leftrightarrow x>9$.

Значит, $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=2592$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x|+|8y|+|120-15x-8y|=120$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 60.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}15x\ge0,\\ 8y\ge0,\\ 120-15x-8y\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge0,\\ y\ge0,\\ 15x+8y\le120.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(8;0)$, $G(0;15)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 60.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y+xy^2-2x-2y+10=0,\\ x^3y-xy^3-2x^2+2y^2-30=0.\end{cases}$

Ответ: $(-4;-1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases}xy(x+y)-2(x+y)+10=0,\\ xy\left(x^2-y^2\right)-2\left(x^2-y^2\right)-30=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(xy-2)(x+y)=-10,\\ (xy-2)(x-y)(x+y)=30.\end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x-y=-3$, откуда $y=x+3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(x^2+3x-2\right)\left(2x+3\right)=-10$, $2x^3+9x^2+5x+4=0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x=-4$. Выделив множитель $(x+4)$, получаем $(x+4)\left(2x^2+x+1\right)=0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=-4$. Тогда $y=-1$, и пара чисел $(-4;-1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины A и N треугольника ACN и пересекает его стороны AC и CN соответственно в точках B и K, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BCK к площади треугольника ACN равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $AN:BK$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BCN и ACK равно $\frac{9}{16}$. Найдите отношение $NK:AB$.

Ответ: а) $AN:BK=2$, б) $NK:AB=2:5$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $CK\cdot CN=CB\cdot CA$. Значит, треугольники ACN и KCB подобны по двум сторонам и углу между ними ($AC:KC=CN:CB$, $\angle C$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 2. Следовательно, $AN:BK=2$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $AC=2CK$, $CN=2BC$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{BCN}}{S_{ACK}}=\frac{CB}{CA}\cdot\frac{CN}{CK}$, откуда $\frac{9}{16}=\frac{CB}{2CK}\cdot\frac{2BC}{CK}$. Значит, $\frac{CB}{CK}=\frac{3}{4}$. Пусть $CB=3x$, тогда $CK=4x$, $AC=2CK=8x$, $CN=2BC=6x$, $AB=AC-BC=5x$, $NK=CN-CK=2x$, поэтому $NK:AB=2:5$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 70$.

Ответ: 4.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 70 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 210$, откуда $-\sqrt{210} < x < \sqrt{210}$. На этом промежутке существует 14 натуральных значений x: $x = 1, x = 2, \ldots, x = 14$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 4 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $4x^2 + x + 9 > 2\left|4x - 2\sqrt{x} + 3\right| + 4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0;1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(4x^2 - 4x\sqrt{x} + x\right) + 9 > 2\left(4x - 2\sqrt{x} + 3\right) \Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{x}\right)^2 + 9 > 4\left(2x - \sqrt{x}\right) + 6.$$

Обозначая $2x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 4t + 3 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Если $t < 1$, то $2x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(2\sqrt{x} + 1\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

Если $t > 3$, то $2x - \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{x} - 3\right) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$.

Значит, $x \in [0;1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

3. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 7, 8, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1296.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 4 или 8 (3 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1296$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 96.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x \ge 0, \\ 4y \ge 0, \\ 48 - 3x - 4y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 3x + 4y \le 48. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(16; 0)$, $G(0; 12)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 96.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(2; 1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y)-3(x-y)+1=0, \\ xy\left(x^2-y^2\right)-3\left(x^2-y^2\right)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)(x-y)=-1, \\ (xy-3)(x-y)(x+y)=-3. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x+y=3$, откуда $y=-x+3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(-x^2+3x-3\right)(2x-3)=-1$, $2x^3-9x^2+15x-10=0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x=2$. Выделив множитель $(x-2)$, получаем $(x-2)\left(2x^2-5x+5\right)=0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=2$. Тогда $y=1$, и пара чисел $(2;1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины L и M треугольника FLM и пересекает его стороны FL и FM соответственно в точках A и H, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника FLM к площади треугольника AFH равно $\frac{49}{9}$.

а) Найдите отношение $LM : AH$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников AFM и FHL равно $\frac{1}{4}$. Найдите отношение $AL : MH$.

Ответ: а) $LM : AH = 7:3$, б) $AL : MH = 11$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $FL \cdot FA = FM \cdot FH$. Значит, треугольники FLM и AFH подобны по двум сторонам и углу между ними ($FL : FH = FM : FA$, $\angle F$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен $\frac{7}{3}$. Следовательно, $LM : AH = 7:3$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $FL=\frac{7}{3}FH$, $FM=\frac{7}{3}FA$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{AFM}}{S_{FHL}}=\frac{FA}{FL}\cdot\frac{FM}{FH}$, откуда $\frac{1}{4}=\frac{FA}{\frac{7}{3}FH}\cdot\frac{\frac{7}{3}FA}{FH}$. Значит, $\frac{FA}{FH}=\frac{1}{2}$. Пусть $CB=3x$, тогда $FH=6x$, $FL=\frac{7}{3}FH=14x$, $FM=\frac{7}{3}FA=7x$, $HM=FM-FH=x$, $AL=FL-FA=11x$, поэтому $AL:MH=11$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{9} + 33$.

Ответ: 5.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{9} + 33 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 297$, откуда $-\sqrt{297} < x < \sqrt{297}$. На этом промежутке существует 17 натуральных значений x: $x = 1, x = 2, \ldots, x = 17$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 5 возможностей. Итак, получаем 5 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $x^2 + x + 20 > 8\left|x - \sqrt{x} + 1\right| + 2x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(x^2 - 2x\sqrt{x} + x\right) + 20 > 8\left(x - \sqrt{x} + 1\right) \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x}\right)^2 + 20 > 8\left(x - \sqrt{x}\right) + 8.$$

Обозначая $x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 8t + 12 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

Если $t < 2$, то $x - \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt{x} - 2\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \le x < 4$.

Если $t > 6$, то $x - \sqrt{x} - 6 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$.

Значит, $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

3. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 6, 7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 432.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 30.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x \ge 0, \\ 12y \ge 0, \\ 60 - 5x - 12y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 5x + 12y \le 60. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(12; 0)$, $G(0; 5)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 30.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-3; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x + y) + 3(x + y) + 24 = 0, \\ xy\left(x^2 - y^2\right) + 3\left(x^2 - y^2\right) - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy + 3)(x + y) = -24, \\ (xy + 3)(x - y)(x + y) = 48. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x-y=-2$, откуда $y=x+2$. Подставляем это в первое уравнение: $(x^2+2x+3)(2x+2)=-24$, $x^3+3x^2+5x+15=0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x=-3$. Выделив множитель $(x+3)$, получаем $(x+3)(x^2+5)=0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=-3$. Тогда $y=-1$, и пара чисел $(-3;-1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $\frac{9}{121}$.

а) Найдите отношение $QE:BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ:DE$.

Ответ: а) $QE:BD=11:3$, б) $BQ:DE=5:19$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $MQ\cdot MB=ME\cdot MD$. Значит, треугольники MQE и MDB подобны по двум сторонам и углу между ними ($MQ:MD=ME:MB$, $\angle M$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен $\frac{11}{3}$. Следовательно, $QE:BD=11:3$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $MQ=\frac{11}{3}MD$, $ME=\frac{11}{3}MB$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{BME}}{S_{DQM}}=\frac{MB}{MQ}\cdot\frac{ME}{MD}$, откуда $4=\frac{MB}{\frac{11}{3}MD}\cdot\frac{\frac{11}{3}MB}{MD}$. Значит, $\frac{MB}{MD}=2$. Пусть $MD=3x$, тогда $MB=6x$, $MQ=\frac{11}{3}MD=11x$, $ME=\frac{11}{3}MB=22x$, $DE=ME-MD=19x$, $BQ=MQ-MB=5x$, поэтому $BQ:DE=5:19$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy, имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 98$.

Ответ: 5.

Решение. Найдём те значения x, при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 98 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 294$, откуда $-\sqrt{294} < x < \sqrt{294}$. На этом промежутке существует 17 натуральных значений x: $x = 1, x = 2, \ldots, x = 17$. При этом y принимает целые значения только при x, делящихся на 3 – всего 5 возможностей. Итак, получаем 5 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $4x^2 + x + 5 > 2\left|4x - 2\sqrt{x} + 1\right| + 4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0;1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(4x^2 - 4x\sqrt{x} + x\right) + 5 > 2\left(4x - 2\sqrt{x} + 1\right) \Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{x}\right)^2 + 5 > 4\left(2x - \sqrt{x}\right) + 2.$$

Обозначая $2x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 4t + 3 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Если $t < 1$, то $2x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(2\sqrt{x} + 1\right) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

Если $t > 3$, то $2x - \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(2\sqrt{x} - 3\right) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$.

Значит, $x \in [0;1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 7, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 4 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 24.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x \ge 0, \\ 3y \ge 0, \\ 24 - 4x - 3y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 4x + 3y \le 24. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(6;0)$, $G(0;8)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 24.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(4;1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y)-5(x-y)+3=0, \\ xy\left(x^2-y^2\right)-5\left(x^2-y^2\right)+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-5)(x-y)=-3, \\ (xy-5)(x-y)(x+y)=-15. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x+y=5$, откуда $y=-x+5$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(-x^2+5x-5\right)(2x-5)=-3$, $2x^3-15x^2+35x-28=0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x=4$. Выделив множитель $(x-4)$, получаем $(x-4)\left(2x^2-7x+7\right)=0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=4$. Тогда $y=1$, и пара чисел $(4;1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины P и T треугольника MPT и пересекает его стороны MP и MT соответственно в точках D и E, отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника MDE к площади треугольника MPT равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $DE:TP$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников MDT и EMP равно $\frac{4}{9}$. Найдите отношение $TE:PD$.

Ответ: а) $DE:TP=1:2$, б) $TE:PD=1:4$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $MT\cdot ME=MP\cdot MD$. Значит, треугольники MPT и MED подобны по двум сторонам и углу между ними ($MP:ME=MT:MD$, $\angle M$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 2. Следовательно, $DE:TP=1:2$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $MT=2MD$, $MP=2ME$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{MDT}}{S_{EMP}}=\frac{MD}{MP}\cdot\frac{MT}{ME}$, откуда $\frac{4}{9}=\frac{MD}{2ME}\cdot\frac{2MD}{ME}$. Значит, $\frac{MD}{ME}=\frac{2}{3}$. Пусть $MD=2x$, тогда $ME=3x$, $MP=2ME=6x$, $MT=2MD=4x$, $ET=MT-ME=x$, $DP=MP-MD=4x$, поэтому $TE:PD=1:4$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(5) Решено неравенство $y>0$ (или $y\ge 0$) .... ***2 балла,***

– сформулировано утверждение, что надо найти количество кратных трём натуральных чисел из полученного промежутка .... ***2 балла.***

2.(5) Обоснованно раскрыт модуль .... ***1 балл.***

При решении с помощью замены:

– сделана замена $ax-\sqrt{x}=t$ и неравенство приведено к неравенству относительно t .... ***1 балл,***

– решено квадратное неравенство относительно t .... ***1 балл,***

– за каждый из двух рассмотренных промежутков для t .... ***по 1 баллу.***

При другом способе решения:

– Неравенство приведено к виду $\left(\sqrt{x}+a\right)\left(\sqrt{x}+b\right)\left(\sqrt{x}+c\right)\left(\sqrt{x}+d\right)>0$ .... ***2 балла.***

3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***

– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***

– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***

– ответ записан в виде $6^k\cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

4.(4) Построено множество .... ***3 балла,***

– найдена его площадь .... ***1 балл.***

5.(6) Получено линейное соотношение между переменными (в билете 25 – $y=x+3$, в билете 26 – $x+y=3$, в билете 27 – $y=x+2$, в билете 28 – $x+y=5$) .... ***3 балла,***

– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***

– получено решение системы.......... ***1 балл.***

6.(6) Доказано подобие треугольников с известным отношением площадей .... ***2 балла,***

– найдено отношение пункта а) .... ***1 балл,***

– найдено отношение пункта б) .... ***3 балла.***