# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 9 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}}\left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4}\right) \geq 1.$$

**2.** Решите уравнение

$$(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = 2$, $CD = 1$, $DE = 3$. Окружности $\Omega$ и $\omega$, касающиеся друг друга, таковы, что $\Omega$ проходит через точки $A$ и $E$, а $\omega$ проходит через точки $B$ и $C$. Найдите радиусы окружностей $\Omega$ и $\omega$, если известно, что их центры и точка $D$ лежат на одной прямой.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+9| + |x+2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

**7.** Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярны $B_1D$ и проходят через вершины $A$ и $D_1$ соответственно. Пусть $F$ и $H$ соответственно – точки пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$ с диагональю $B_1D$, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Найдите отрезок $B_1D$ и объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}}\left(\frac{\left(x^2-3\right)(6x-12)}{25}\right)\geq 1.$$

**2.** Решите уравнение

$$\left(\cos 2x-2\cos 4x\right)^2=9+\cos^2 5x.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sqrt{y-3x}+3x=12, \\ y^2+y-3x-9x^2=144. \end{cases}$$

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на прямой, причём $AB=BC=DE=2$, $CD=1$, Окружности $\Omega$ и $\omega$, касающиеся друг друга, таковы, что $\Omega$ проходит через точки $D$ и $E$, а $\omega$ проходит через точки $B$ и $C$. Найдите радиусы окружностей $\Omega$ и $\omega$, если известно, что их центры и точка $A$ лежат на одной прямой.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|y-4|+|x+12|-3\right)\left(x^2+y^2-12\right)=0, \\ (x+5)^2+(y-4)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

**7.** Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярны $L_1N$ и проходят через вершины $K$ и $N_1$ соответственно. Пусть $A$ и $B$ соответственно – точки пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$ с диагональю $L_1N$, при этом $AN<BN$.

а) Найдите отношение $L_1B:AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{1}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Найдите отрезок $L_1N$ и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
# 11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}}\left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25}\right)\geq 1.$$

**2.** Решите уравнение

$$(\cos x+2\cos 6x)^2=9+\sin^2 3x.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5,\\4x^2+2x+3y-9y^2=32.\end{cases}$$

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на прямой, причём $AB=CD=1$, $BC=DE=2$. Окружности $\Omega$ и $\omega$, касающиеся друг друга, таковы, что $\Omega$ проходит через точки $A$ и $E$, а $\omega$ проходит через точки $B$ и $C$. Найдите радиусы окружностей $\Omega$ и $\omega$, если известно, что их центры и точка $D$ лежат на одной прямой.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|y-10|+|x+3|-2)(x^2+y^2-6)=0,\\(x+3)^2+(y-5)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

**7.** Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярны $B_1D$ и проходят через вершины $A$ и $D_1$ соответственно. Пусть $F$ и $H$ соответственно – точки пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$ с диагональю $B_1D$, при этом $DF<DH$.

а) Найдите отношение $B_1H:DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{3}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Найдите отрезок $B_1D$ и объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-6}{4x-10}}\left(\frac{\left(x^2-6\right)\left(4x-10\right)}{9}\right)\geq 1.$$

**2.** Решите уравнение

$$\left(\cos 2x-3\cos 4x\right)^2=16+\cos^2 5x.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3x+\sqrt{3x-y}+y=6,\\ 9x^2+3x-y-y^2=36.\end{cases}$$

**4.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ последовательно расположены на прямой, причём $AB=4$, $BC=DE=2$, $CD=3$, Окружности $\Omega$ и $\omega$, касающиеся друг друга, таковы, что $\Omega$ проходит через точки $D$ и $E$, а $\omega$ проходит через точки $B$ и $C$. Найдите радиусы окружностей $\Omega$ и $\omega$, если известно, что их центры и точка $A$ лежат на одной прямой.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(|y+2|+|x-11|-3\right)\left(x^2+y^2-13\right)=0,\\ (x-5)^2+(y+2)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

**7.** Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярны $L_1N$ и проходят через вершины $K$ и $N_1$ соответственно. Пусть $A$ и $B$ соответственно – точки пересечения плоскостей $\alpha$ и $\beta$ с диагональю $L_1N$, при этом $AN<BN$.

а) Найдите отношение $L_1B:AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 2 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей $\alpha$ и $\beta$. Найдите отрезок $L_1N$ и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
# 11 класс

БИЛЕТ 21 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=5|\cos x|.$$

**2.** Найдите все пары *положительных* чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84. \end{cases}$$

**3.** Решите неравенство

$$17^{\frac{5x-3}{3-x}}\cdot 2^{3-x}\leq 68.$$

**4.** Окружность $\omega$ радиуса 6 с центром $O$ вписана в остроугольный треугольник $CFM$ и касается его сторон $CM$ и $FM$ в точках $P$ и $K$ соответственно. Окружность $\Omega$ радиуса $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ с центром $T$ описана около треугольника $PKM$.

а) Найдите $OM$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника $CFT$ к площади треугольника $CFM$ равно $\frac{5}{8}$. Найдите длину биссектрисы $MA$ треугольника $CFM$, а также его площадь.

**5.** В числе $2016****02**$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \left|16+6x-x^2-y^2\right|+|6x|=16+12x-x^2-y^2, \\ (a+15)y+15x-a=0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

**7.** Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром $BC$ пересекает рёбра $AC$ и $AB$ соответственно в точках $P$ и $Q$, отличных от вершин призмы. Отрезки $B_1P$ и $C_1Q$ пересекаются в точке $T$, и при этом $B_1P=5$, $TQ=2$.

а) Найдите угол $TPA$.

б) Найдите отношение $AP:CP$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC=3$. Найдите объём призмы.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## 11 класс

БИЛЕТ 22 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{2\cos 3x}{\cos x}=5|\sin x|.$$

**2.** Найдите все пары *положительных* чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x-3\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{x}{y}}+6=0, \\ x^2y^2+x^4=82. \end{cases}$$

**3.** Решите неравенство

$$5^{\frac{x+5}{x+4}}\cdot 3^{x+4}\geq 75.$$

**4.** Окружность $\omega$ радиуса 4 с центром $O$ вписана в остроугольный треугольник $EFQ$ и касается его сторон $FQ$ и $EQ$ в точках $M$ и $P$ соответственно. Окружность $\Omega$ радиуса $\frac{\sqrt{65}}{2}$ с центром $T$ описана около треугольника $PQM$.

а) Найдите $OQ$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника $FTE$ к площади треугольника $EFQ$ равно $\frac{2}{3}$. Найдите длину биссектрисы $QA$ треугольника $EFQ$, а также его площадь.

**5.** В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \left|9+8y-x^2-y^2\right|+|8y|=16y+9-x^2-y^2, \\ (a+4)x-13y+a=0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

**7.** Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром $AC$ пересекает рёбра $AB$ и $BC$ соответственно в точках $F$ и $N$, отличных от вершин призмы. Отрезки $C_1F$ и $A_1N$ пересекаются в точке $P$, и при этом $A_1N=7$, $C_1P=6$.

а) Найдите угол $PFA$.

б) Найдите отношение $AF:FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB=6$. Найдите объём призмы.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
# 11 класс

БИЛЕТ 23 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите уравнение

$$\frac{3\sin 3x}{\sin x}-\frac{2\cos 3x}{\cos x}=7|\cos x|.$$

**2.** Найдите все пары *положительных* чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}2x-\sqrt{xy}-4\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0,\\ 2x^2+x^2y^4=18y^2.\end{cases}$$

**3.** Решите неравенство

$$11^{\frac{3x-4}{4-x}}\cdot 3^{4-x}\le 99.$$

**4.** Окружность $\omega$ радиуса 8 с центром $O$ вписана в остроугольный треугольник $ENT$ и касается его сторон $EN$ и $NT$ в точках $C$ и $A$ соответственно. Окружность $\Omega$ радиуса $\frac{\sqrt{145}}{2}$ с центром $B$ описана около треугольника $ACN$.

а) Найдите $ON$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника $BTE$ к площади треугольника $ENT$ равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы $NL$ треугольника $ENT$, а также его площадь.

**5.** В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases}\left|9-x^2-y^2-2y\right|+|-2y|=9-x^2-y^2-4y,\\ 15y+3a=(4a+15)x.\end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

**7.** Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром $A_1C_1$ пересекает рёбра $B_1C_1$ и $A_1B_1$ соответственно в точках $N_1$ и $K_1$, отличных от вершин призмы. Отрезки $AN_1$ и $CK_1$ пересекаются в точке $F$, и при этом $AN_1=7$, $CF=4$.

а) Найдите угол $FN_1B_1$.

б) Найдите отношение $C_1N_1:N_1B_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $BC=8$. Найдите объём призмы.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 24 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите уравнение

$$\frac{2\sin 3x}{\sin x}-\frac{3\cos 3x}{\cos x}=7|\sin x|.$$

**2.** Найдите все пары *положительных* чисел $(x, y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 3y-\sqrt{\dfrac{y}{x}}-6\sqrt{xy}+2=0, \\ x^2+81x^2y^4=2y^2. \end{cases}$$

**3.** Решите неравенство

$$2^{\frac{1-x}{3+x}}\cdot 7^{3+x}\geq 56.$$

**4.** Окружность $\omega$ радиуса 6 с центром $O$ вписана в остроугольный треугольник $ABC$ и касается его сторон $AB$ и $BC$ в точках $F$ и $T$ соответственно. Окружность $\Omega$ радиуса $\frac{\sqrt{85}}{2}$ с центром $M$ описана около треугольника $BFT$.

а) Найдите $BO$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника $ACM$ к площади треугольника $ABC$ равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы $BQ$ треугольника $ABC$, а также его площадь.

**5.** В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} \left|4-2x-x^2-y^2\right|+|-2x|=4-4x-x^2-y^2, \\ (3a+15)x=3y+a+4. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

**7.** Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром $A_1B_1$ пересекает рёбра $A_1C_1$ и $B_1C_1$ соответственно в точках $T_1$ и $L_1$, отличных от вершин призмы. Отрезки $BT_1$ и $AL_1$ пересекаются в точке $S$, и при этом $AL_1=7$, $ST_1=2$.

а) Найдите угол $ST_1A_1$.

б) Найдите отношение $A_1T_1:T_1C_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC=5$. Найдите объём призмы.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## 11 класс

БИЛЕТ 33 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\left(x^2-3x+3\right)^{4x^3+5x^2} \le \left(x^2-3x+3\right)^{2x^3+18x}.$$

**2.** Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x-\cos 7x}{\sin 4x+\sin 2x}=2|\sin 2x|.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y+xy^2-2x-2y+10=0, \\ x^3y-xy^3-2x^2+2y^2-30=0. \end{cases}$$

**4.** В треугольнике $ABC$ медианы $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $M$. Окружность, построенная на отрезке $BM$ как на диаметре, проходит через вершину $C$ и касается прямой $DE$. Известно, что $CM=4$. Найдите высоту $AH$ треугольника $ABC$, угол $CBD$ и площадь треугольника $ABC$.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x|+|8y|+|120-15x-8y|=120, \\ \left(x-4\cos\frac{a\pi}{2}\right)^2+\left(y-\frac{15}{2}\right)^2=\left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.
б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

**7.** Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера $\Omega$ радиуса $r=\sqrt{\frac{35}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках $AA_1$ и $BB_1$ выбраны соответственно точки $K$ и $L$ такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости $KBC$ и $LA_1C_1$ касаются сферы $\Omega$. Найдите объём призмы и длину отрезка $AK$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## 11 класс

БИЛЕТ 34 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\left(x^2-x+1\right)^{16x^3-6x} \le \left(x^2-x+1\right)^{13x^2+x^3}.$$

**2.** Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\sin 4x-\sin 2x}=-3\cdot|\sin 2x|$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y-xy^2-3x+3y+1=0, \\ x^3y-xy^3-3x^2+3y^2+3=0. \end{cases}$$

**4.** В треугольнике $KLM$ медианы $LD$ и $ME$ пересекаются в точке $G$. Окружность, построенная на отрезке $LG$ как на диаметре, проходит через вершину $M$ и касается прямой $DE$. Известно, что $GM=6$. Найдите высоту $KT$ треугольника $KLM$, угол $LGM$ и площадь треугольника $KLM$.

**5.** В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} |3x|+|4y|+|48-3x-4y|=48, \\ (x-8)^2+\left(y+6\cos\dfrac{a\pi}{2}\right)^2=(a+4)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.
б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

**7.** Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6. Сфера $\Omega$ радиуса $r=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках $AA_1$ и $BB_1$ выбраны соответственно точки $M$ и $K$ такие, что $KM\parallel AB$, а плоскости $ACK$ и $MB_1C_1$ касаются сферы $\Omega$. Найдите объём призмы и длину отрезка $BK$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
## 11 класс

БИЛЕТ 35 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\left(x^2+3x+3\right)^{5x^3-3x^2} \le \left(x^2+3x+3\right)^{3x^3+5x}.$$

**2.** Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\sin 4x+\sin 2x}=-4\cdot|\sin 2x|.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y+xy^2+3x+3y+24=0, \\ x^3y-xy^3+3x^2-3y^2-48=0. \end{cases}$$

**4.** В треугольнике $ABC$ медианы $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $K$. Окружность, построенная на отрезке $CK$ как на диаметре, проходит через вершину $B$ и касается прямой $DE$. Известно, что $DK=3$. Найдите высоту $AH$ треугольника $ABC$, радиус окружности и площадь треугольника $ABC$.

**5.** В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,6,7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} |5x|+|12y|+|60-5x-12y|=60, \\ \left(x+6\sin\dfrac{a\pi}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a+3}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

**7.** Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера $\Omega$ радиуса $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках $CC_1$ и $BB_1$ выбраны соответственно точки $T$ и $F$ такие, что $FT \parallel BC$, а плоскости $ABT$ и $FA_1C_1$ касаются сферы $\Omega$. Найдите объём призмы и длину отрезка $CT$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 36 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

**1.** Решите неравенство

$$\left(x^2+x+1\right)^{4x^3+x^2} \geq \left(x^2+x+1\right)^{x-2x^3}.$$

**2.** Решите уравнение

$$\frac{\sin 8x+\sin 4x}{\cos 5x+\cos x}=6|\sin 2x|.$$

**3.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y-xy^2-5x+5y+3=0, \\ x^3y-xy^3-5x^2+5y^2+15=0. \end{cases}$$

**4.** В треугольнике $KLM$ медианы $LD$ и $ME$ пересекаются в точке $T$. Окружность, построенная на отрезке $MT$ как на диаметре, проходит через вершину $L$ и касается прямой $DE$. Известно, что $DT=2$. Найдите высоту $KH$ треугольника $KLM$, угол $ETD$ и площадь треугольника $KLM$.

**5.** В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

**6.** Дана система уравнений

$$\begin{cases} |4x|+|3y|+|24-4x-3y|=24, \\ (x-3)^2+\left(y-4\sin\frac{a\pi}{2}\right)^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

**7.** Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 5. Сфера $\Omega$ радиуса $r=\frac{\sqrt{33}}{4}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках $CC_1$ и $BB_1$ выбраны соответственно точки $F$ и $L$ такие, что $FL \parallel BC$, а плоскости $LAC$ и $FA_1B_1$ касаются сферы $\Omega$. Найдите объём призмы и длину отрезка $CF$.