1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}}\left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4}\right)\geq 1$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-2}{2x-3}>0$, $\frac{x^2-2}{2x-3}\neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, $x\neq 1$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-2}{2x-3}-1\right)\left(\frac{(x^2-2)(2x-3)}{4}-\frac{x^2-2}{2x-3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-3}\cdot\frac{(x^2-2)\left[(2x-3)^2-4\right]}{4(2x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(2x-5)(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

2. Решите уравнение $(\cos x-3\cos 4x)^2=16+\sin^2 3x$.

Ответ: $x=\pi+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-4\leq\cos x-3\cos 4x\leq 4$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 16. В то же время, правая часть уравнения не меньше 16. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos x-3\cos 4x)^2=16$ и $16+\sin^2 3x=16$, откуда $|\cos x-3\cos 4x|=4$, $\sin 3x=0$.

Из второго уравнения получаем $x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathrm{Z}$. Подстановкой в первое уравнение[1] убеждаемся, что подходит только $x=\pi+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\frac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{19}{4};\frac{17}{8}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2y}=u$, $x-2y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=\frac{7}{2}, \\ u^2v+u^2=\frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{7}{2}-u, \\ u^2\left(\frac{7}{2}-u\right)+u^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3-9u^2+27=0$. Подбирая целый корень $u=3$ и выделяя множитель $(u-3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-3)\left(2u^2-3u-9\right)=0$, откуда $u=3$ или $u=-\frac{9}{2}$. Значение $u=-\frac{9}{2}$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x+2y=9, \\ x-2y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{19}{2}, \\ 4y=\frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{19}{4}, \\ y=\frac{17}{8}. \end{cases}$$

---

[1] Для этого рассматриваем 6 возможных случаев: $x=2k\pi$, $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = 2$, $CD = 1$, $DE = 3$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

Ответ: $R = 8\sqrt{\frac{3}{11}}$, $r = 5\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Поскольку C – середина хорды AE окружности Ω, то отрезок OC перпендикулярен OE. Опустим из точки Q перпендикуляр QH на прямую AE. Тогда $BH = HC = 1$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).

Пусть $OC = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как OC – средняя линия треугольника DHQ), $r = QB = \sqrt{QH^2 + BH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$, $R = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2 + 9}$. Выразим двумя способами отрезок OQ. С одной стороны, так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов, т.е. $OQ = R - r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $CHQO$ получаем, что $OQ^2 = CH^2 + (QH - OC)^2 = 1 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 16}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 16 \Leftrightarrow \sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 7 - 2x^2$.

При условии $7 - 2x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $4x^4 + 5x^2 + 1 = 49 - 28x^2 + 4x^4$, $x^2 = \frac{16}{11}$. Тогда получаем, что $R = 8\sqrt{\frac{3}{11}}$, $r = 5\sqrt{\frac{3}{11}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 13122.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|y+9| + |x+2| - 2\right)\left(x^2 + y^2 - 3\right) = 0, \\ (x+2)^2 + (y+4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 9$, $a = 23 + 4\sqrt{15}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+9| + |x+2| = 2$ и $x^2 + y^2 = 3$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-2; -9)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-2; -4)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{20} \pm \sqrt{3}$, две общие точки при $R \in \left(\sqrt{20} - \sqrt{3}; \sqrt{20} + \sqrt{3}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, две общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к.

$3 < \sqrt{20} - \sqrt{3} < 7$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{20} - \sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{20} - \sqrt{3} < 3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{20} - \sqrt{3} < 3 < \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R = 7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $7 > \sqrt{20} + \sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R = 3$ и $R = \sqrt{20} + \sqrt{3}$. Тогда $a = 9$ и $a = 23 + 4\sqrt{15}$.

7. Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны B_1D и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю B_1D, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок B_1D и объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $B_1D = 3\left(1 + \sqrt{13}\right)$, $V = 108\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости BDD_1B_1) плоскость α проходит через точку C – и, значит, через центр O грани $ABCD$. Отрезки B_1H и DF – проекции параллельных отрезков B_1D_1 и DO на прямую B_1D, причём $B_1D_1 = 2DO$. Значит, $B_1H : DF = 2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $AB = 2r = 6$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 6. Так как $B_1D \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок HF, поэтому $HF = 6$.

Обозначим $B_1D = d$. Поскольку D_1H – высота прямоугольного треугольника B_1D_1D, то $B_1H \cdot B_1D = B_1D_1^2 = 72$ и, следовательно, $B_1H = \frac{72}{d}$. Тогда $DF = \frac{1}{2}B_1H = \frac{36}{d}$ и $HF = B_1D - B_1H - DF = d - \frac{72}{d} - \frac{36}{d}$. Получаем уравнение $6 = d - \frac{108}{d}$, откуда $d^2 - 6d - 108 = 0$, $d = 3 + 3\sqrt{13}$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна $h = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{9\left(14 + 2\sqrt{13}\right) - 72} = 3\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V = AB^2 \cdot h = 108\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}}\left(\frac{\left(x^2-3\right)\left(6x-12\right)}{25}\right)\geq 1$.

Ответ: $x\in\left[\frac{7}{6};\sqrt{3}\right)\cup\left[\frac{17}{6};3\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-3}{6x-12}>0$, $\frac{x^2-3}{6x-12}\neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$, $x\neq 3$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-3}{6x-12}-1\right)\left(\frac{\left(x^2-3\right)\left(6x-12\right)}{25}-\frac{x^2-3}{6x-12}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-6x+9}{6x-12}\cdot\frac{\left(x^2-3\right)\left[\left(6x-12\right)^2-25\right]}{25\left(6x-12\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\left(x-3\right)^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(6x-17\right)\left(6x-7\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\frac{7}{6};\sqrt{3}\right]\cup\left[\frac{17}{6};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x\in\left[\frac{7}{6};\sqrt{3}\right)\cup\left[\frac{17}{6};3\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

2. Решите уравнение $\left(\cos 2x-2\cos 4x\right)^2=9+\cos^2 5x$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-3\leq\cos x-3\cos 4x\leq 3$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 9. В то же время, правая часть уравнения не меньше 9. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $\left(\cos 2x-2\cos 4x\right)^2=9$ и $9+\cos^2 5x=9$, откуда $\left|\cos 2x-2\cos 4x\right|=3$, $\cos 5x=0$.

Из второго уравнения получаем $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathrm{Z}$. Подстановкой в первое уравнение[2] убеждаемся, что подходит только $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}y+\sqrt{y-3x}+3x=12,\\ y^2+y-3x-9x^2=144.\end{cases}$

Ответ: $\left(-24;72\right),\left(-\frac{4}{3};12\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{y-3x}=u$, $y+3x=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=12,\\ u^2v+u^2=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=12-u,\\ u^2\left(12-u\right)+u^2=144.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-13u^2+144=0$. Подбирая целый корень $u=4$ и выделяя множитель $(u-4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $\left(u-4\right)\left(u^2-9u-36\right)=0$, откуда $u=-3$, $u=4$ или $u=12$. Значение $u=-3$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=8$. Тогда

$$\begin{cases}y-3x=16,\\ y+3x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=24,\\ 6x=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{3},\\ y=12.\end{cases}$$

При $u=12$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases}y-3x=144,\\ y+3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=144,\\ 6x=-144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-24,\\ y=72.\end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB=BC=DE=2$, $CD=1$, Окружно-

[2] Для этого рассматриваем 5 возможных случаев: $x=\frac{\pi}{10}+k\pi$, $x=k\pi+\frac{3\pi}{10}$, $x=k\pi+\frac{5\pi}{10}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

сти Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

Ответ: $R=\dfrac{8}{\sqrt{19}}$, $r=\dfrac{11}{2\sqrt{19}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Опустим из точек O и Q перпендикуляры OH и QT на прямую AB, тогда точки H и T – середины хорд DE и BC соответственно (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам). Значит, $AT=3$, $AH=6$.

Пусть $QT=x$. Тогда $QH=2x$ (так как QT – средняя линия треугольника AOH), $r=QB=\sqrt{QT^2+BT^2}=\sqrt{x^2+1}$, $R=OD=\sqrt{OH^2+DH^2}=\sqrt{4x^2+1}$. Выразим двумя способами отрезок OQ. С одной стороны, так как окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов, т.е. $OQ=R+r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $HTQO$ получаем, что $OQ^2=TH^2+(QT-OH)^2=9+x^2$.

Значит, $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2+9}$, откуда $5x^2+2+2\sqrt{4x^4+5x^2+1}=x^2+9 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4+5x^2+1}=7-4x^2$.

При условии $7-4x^2\ge 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4+20x^2+4=49-56x^2+16x^4$, $x^2=\dfrac{45}{76}$. Тогда получаем, что $R=\dfrac{8}{\sqrt{19}}$, $r=\dfrac{11}{2\sqrt{19}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6 или 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot 9\cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1=3645$ способов.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|y-4|+|x+12|-3)(x^2+y^2-12)=0,\\ (x+5)^2+(y-4)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a=16$, $a=53+4\sqrt{123}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y-4|+|x+12|=3$ и $x^2+y^2=12$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-12;4)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $2\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(-5;4)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ пустое множество, при $a=0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{41}\pm 2\sqrt{3}$, две общие точки при $R\in\left(\sqrt{41}-2\sqrt{3};\sqrt{41}+2\sqrt{3}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=4$ или $R=10$, две общие точки при $R\in(4;10)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{41}+2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $4<\sqrt{41}+2\sqrt{3}<10$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R=\sqrt{41}-2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к.

$\sqrt{41}-2\sqrt{3}<4$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R=4$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{41}-2\sqrt{3}<4<\sqrt{41}+2\sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R=10$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $10>\sqrt{41}+2\sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=4$ и $R=\sqrt{41}+2\sqrt{3}$. Тогда $a=16$ и $a=53+4\sqrt{123}$.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N, при этом $AN<BN$.

а) Найдите отношение $L_1B:AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{1}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $L_1N=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{13}\right)$, $V=\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости LNN_1L_1) плоскость α проходит через точку M – и, значит, через центр O грани $KLMN$. Отрезки L_1B и AN – проекции параллельных отрезков L_1N_1 и NO на прямую L_1N, причём $L_1N_1=2NO$. Значит, $L_1B:AN=2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $KN=2r=1$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 1. Так как $L_1N\perp\alpha$, этим расстоянием является отрезок AB, поэтому $AB=1$.

Обозначим $L_1N=d$. Поскольку N_1B – высота прямоугольного треугольника L_1N_1N, то $L_1B\cdot L_1N=L_1N_1{}^2=2$ и, следовательно, $L_1B=\frac{2}{d}$. Тогда $AN=\frac{1}{2}L_1B=\frac{1}{d}$ и $AB=L_1N-L_1B-AN=d-\frac{2}{d}-\frac{1}{d}$. Получаем уравнение $1=d-\frac{3}{d}$, откуда $d^2-d-3=0$, $d=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (поскольку $d>0$).

Наконец, высота призмы равна $h=\sqrt{L_1N^2-LN^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(14+2\sqrt{13}\right)-2}=\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V=KL^2\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-5}{2x-6}}\left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25}\right)\geq 1$.

Ответ: $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-5}{2x-6}>0$, $\frac{x^2-5}{2x-6}\neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)\cup(3;+\infty)$, $x\neq 1$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-5}{2x-6}-1\right)\left(\frac{(x^2-5)(2x-6)}{25}-\frac{x^2-5}{2x-6}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{2x-6}\cdot\frac{(x^2-5)\left[(2x-6)^2-25\right]}{25(2x-6)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)(2x-11)(2x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\sqrt{5}\right]\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)\cup\left[\frac{11}{2};+\infty\right)$.

2. Решите уравнение $(\cos x+2\cos 6x)^2=9+\sin^2 3x$.

Ответ: $x=2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-3\leq\cos x+2\cos 6x\leq 3$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 9. В то же время, правая часть уравнения не меньше 9. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos x+2\cos 6x)^2=9$ и $9+\sin^2 3x=9$, откуда $|\cos x+2\cos 6x|=3$, $\sin 3x=0$.

Из второго уравнения получаем $x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathrm{Z}$. Подстановкой в первое уравнение[3] убеждаемся, что подходит только $x=2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5,\\4x^2+2x+3y-9y^2=32.\end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{17}{4};\frac{5}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y}=u$, $2x-3y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=5,\\u^2v+u^2=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=5-u,\\u^2(5-u)+u^2=32.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-6u^2+32=0$. Подбирая целый корень $u=-2$ и выделяя множитель $(u+2)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)\left(u^2-8u+16\right)=0$, откуда $u=-2$ или $u=4$. Значение $u=-2$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=1$. Тогда

$$\begin{cases}2x+3y=16,\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=17,\\6y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{17}{4},\\y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB=CD=1$, $BC=DE=2$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

Ответ: $R=\frac{27}{2\sqrt{19}}$, $r=\frac{8}{\sqrt{19}}$.

---

[3] Для этого рассматриваем 6 возможных случаев: $x=2k\pi$, $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Поскольку C – середина хорды AE окружности Ω, то отрезок OC перпендикулярен OE. Опустим из точки Q перпендикуляр QH на прямую AE. Тогда $BH = HC = 1$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).

Пусть $OC = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как OC – средняя линия треугольника DHQ), $r = QB = \sqrt{QH^2 + BH^2} = \sqrt{4x^2+1}$, $R = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2+9}$. Выразим двумя способами отрезок OQ. С одной стороны, так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов, т.е. $OQ = R - r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $CHQO$ получаем, что $OQ^2 = CH^2 + (QH - OC)^2 = 1 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{x^2+9}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4+5x^2+1} = x^2 + 9 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4+5x^2+1} = 7 - 4x^2$.

При условии $7 - 4x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4 + 20x^2 + 4 = 49 - 56x^2 + 16x^4$, $x^2 = \dfrac{45}{76}$. Тогда получаем, что $R = \dfrac{27}{2\sqrt{19}}$, $r = \dfrac{8}{\sqrt{19}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 1458$ способов.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-10| + |x+3| - 2)(x^2 + y^2 - 6) = 0, \\ (x+3)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 49$, $a = 40 - 4\sqrt{51}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y-10| + |x+3| = 2$ и $x^2 + y^2 = 6$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-3; 10)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{6}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(-3; 5)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{34} \pm \sqrt{6}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{34} - \sqrt{6}; \sqrt{34} + \sqrt{6})$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 7$, две общие точки при $R \in (3; 7)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{34} - \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6} < 7$), т.е. у системы 3 решения.
2) $R = \sqrt{34} + \sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{34} + \sqrt{6} > 7$), т.е. у системы 1 решение.
3) $R = 7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{34} - \sqrt{6} < 7 < \sqrt{34} + \sqrt{6}$), т.е. у системы 3 решения.
4) $R = 3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $3 < \sqrt{34} - \sqrt{6}$),

т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=7$ и $R=\sqrt{34}-\sqrt{6}$. Тогда $a=49$ и $a=40-4\sqrt{51}$.

7. Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны B_1D и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю B_1D, при этом $DF<DH$.

а) Найдите отношение $B_1H:DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса $\frac{3}{2}$ касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок B_1D и объём призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $B_1D=\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{13}\right)$, $V=\frac{27}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости BDD_1B_1) плоскость α проходит через точку C – и, значит, через центр O грани $ABCD$. Отрезки B_1H и DF – проекции параллельных отрезков B_1D_1 и DO на прямую B_1D, причём $B_1D_1=2DO$. Значит, $B_1H:DF=2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $AB=2r=3$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 3. Так как $B_1D\perp\alpha$, этим расстоянием является отрезок HF, поэтому $HF=3$.

Обозначим $B_1D=d$. Поскольку D_1H – высота прямоугольного треугольника B_1D_1D, то $B_1H\cdot B_1D=B_1D_1{}^2=18$ и, следовательно, $B_1H=\frac{18}{d}$. Тогда $DF=\frac{1}{2}B_1H=\frac{9}{d}$ и $HF=B_1D-B_1H-DF=d-\frac{18}{d}-\frac{9}{d}$. Получаем уравнение $3=d-\frac{27}{d}$, откуда $d^2-3d-27=0$, $d=\frac{3+3\sqrt{13}}{2}$ (поскольку $d>0$).

Наконец, высота призмы равна $h=\sqrt{B_1D^2-BD^2}=\sqrt{\frac{9}{4}\left(14+2\sqrt{13}\right)-18}=\frac{3}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V=AB^2\cdot h=\frac{27}{2}\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-6}{4x-10}}\left(\frac{(x^2-6)(4x-10)}{9}\right)\ge 1$.

Ответ: $x\in\left[\frac{7}{4};2\right)\cup\left(2;\sqrt{6}\right)\cup\left[\frac{13}{4};+\infty\right)$.

Решение. ОДЗ неравенства задаётся условиями $\frac{x^2-6}{4x-10}>0$, $\frac{x^2-6}{4x-10}\ne 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$, $x\ne 2$.

На ОДЗ данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-6}{4x-10}-1\right)\left(\frac{(x^2-6)(4x-10)}{9}-\frac{x^2-6}{4x-10}\right)\ge 0\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{4x-10}\cdot\frac{(x^2-6)\left[(4x-10)^2-9\right]}{9(4x-10)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)(4x-13)(4x-7)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{6}\right]\cup\left[\frac{7}{4};\sqrt{6}\right]\cup\left[\frac{13}{4};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ получаем $x\in\left[\frac{7}{4};2\right)\cup\left(2;\sqrt{6}\right)\cup\left[\frac{13}{4};+\infty\right)$.

2. Решите уравнение $(\cos 2x-3\cos 4x)^2=16+\cos^2 5x$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-4\le\cos 2x-3\cos 4x\le 4$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 16. В то же время, правая часть уравнения не меньше 16. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos 2x-3\cos 4x)^2=16$ и $16+\cos^2 5x=16$, откуда $|\cos 2x-3\cos 4x|=4$, $\cos 5x=0$.

Из второго уравнения получаем $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathrm{Z}$. Подстановкой в первое уравнение[4] убеждаемся, что подходит только $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+\sqrt{3x-y}+y=6,\\ 9x^2+3x-y-y^2=36.\end{cases}$

Ответ: $(2;-3),(6;-18)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3x-y}=u$, $3x+y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=6,\\ u^2v+u^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=6-u,\\ u^2(6-u)+u^2=36.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-7u^2+36=0$. Подбирая целый корень $u=-2$ и выделяя множитель $(u+4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)(u^2-9u+18)=0$, откуда $u=-2$, $u=3$ или $u=6$. Значение $u=-2$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=3$. Тогда

$$\begin{cases}3x-y=9,\\ 3x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=-6,\\ 6x=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=-3.\end{cases}$$

При $u=6$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases}3x-y=36,\\ 3x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=-36,\\ 6x=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\ y=-18.\end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB=4$, $BC=DE=2$, $CD=3$, Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E, а ω проходит че-

---

[4] Для этого рассматриваем 5 возможных случаев: $x=\frac{\pi}{10}+k\pi$, $x=k\pi+\frac{3\pi}{10}$, $x=k\pi+\frac{5\pi}{10}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.

рез точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

Ответ: $r = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{17}}$, $R = \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Опустим из точек O и Q перпендикуляры OH и QT на прямую AB, тогда точки H и T – середины хорд DE и BC соответственно (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам). Значит, $AT = 5$, $AH = 10$.

Пусть $QT = x$. Тогда $QH = 2x$ (так как QT – средняя линия треугольника AOH), $r = QB = \sqrt{QT^2 + BT^2} = \sqrt{x^2 + 1}$, $R = OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = \sqrt{4x^2 + 1}$. Выразим двумя способами отрезок OQ. С одной стороны, так как окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов, т.е. $OQ = R + r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $HTQO$ получаем, что $OQ^2 = TH^2 + (QT - OH)^2 = 25 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 25}$, откуда $5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = x^2 + 25 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^4 + 5x^2 + 1} = 23 - 4x^2$.

При условии $23 - 4x^2 \ge 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $16x^4 + 20x^2 + 4 = 529 - 184x^2 + 16x^4$, $x^2 = \dfrac{175}{68}$. Тогда получаем, что $r = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{17}}$, $R = \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 26244.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 2, 4, 6 или 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 26244$ способов.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+2| + |x-11| - 3)(x^2 + y^2 - 13) = 0, \\ (x-5)^2 + (y+2)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 9$, $a = 42 + 2\sqrt{377}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+2| + |x-11| = 3$ и $x^2 + y^2 = 13$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(11; -2)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0; 0)$ радиуса $\sqrt{13}$.

Второе уравнение исходной системы при $a > 0$ задаёт окружность Ω с центром $(5; -2)$ радиуса $R = \sqrt{a}$ (при $a < 0$ пустое множество, при $a = 0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R = \sqrt{29} \pm \sqrt{13}$, две общие точки при $R \in (\sqrt{29} - \sqrt{13}; \sqrt{29} + \sqrt{13})$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R = 3$ или $R = 9$, две общие точки при $R \in (3; 9)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R = \sqrt{29} + \sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3 < \sqrt{29} + \sqrt{13} < 9$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R = \sqrt{29} - \sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к.

$\sqrt{29}-\sqrt{13}<3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R=3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{29}-\sqrt{13}<3<\sqrt{29}+\sqrt{13}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R=9$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $9>\sqrt{29}+\sqrt{13}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=3$ и $R=\sqrt{29}+\sqrt{13}$. Тогда $a=9$ и $a=42+2\sqrt{377}$.

7. Дана правильная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$ с основанием $KLMN$. Плоскости α и β перпендикулярны L_1N и проходят через вершины K и N_1 соответственно. Пусть A и B соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю L_1N, при этом $AN<BN$.

а) Найдите отношение $L_1B:AN$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 2 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок L_1N и объём призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

Ответ: а) $2:1$, б) $L_1N=2\left(1+\sqrt{13}\right)$, $V=32\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

Решение. а) Из соображений симметрии (относительно плоскости LNN_1L_1) плоскость α проходит через точку M – и, значит, через центр O грани $KLMN$. Отрезки L_1B и AN – проекции параллельных отрезков L_1N_1 и NO на прямую L_1N, причём $L_1N_1=2NO$. Значит, $L_1B:AN=2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, её проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $KN=2r=4$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, то есть 4. Так как $L_1N\perp\alpha$, этим расстоянием является отрезок AB, поэтому $AB=4$.

Обозначим $L_1N=d$. Поскольку N_1B – высота прямоугольного треугольника L_1N_1N, то $L_1B\cdot L_1N=L_1N_1{}^2=32$ и, следовательно, $L_1B=\frac{32}{d}$. Тогда $AN=\frac{1}{2}L_1B=\frac{16}{d}$ и $AB=L_1N-L_1B-AN=d-\frac{32}{d}-\frac{16}{d}$. Получаем уравнение $4=d-\frac{48}{d}$, откуда $d^2-4d-48=0$, $d=2\left(1+\sqrt{13}\right)$ (поскольку $d>0$).

Наконец, высота призмы равна $h=\sqrt{L_1N^2-LN^2}=\sqrt{4\left(14+2\sqrt{13}\right)-32}=2\sqrt{6+2\sqrt{13}}$; тогда объём призмы равен $V=KL^2\cdot h=32\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(6) За каждый верно рассмотренный случай (“основание > 1”, “основание < 1”) .... ***3 балла,***
– неэквивалентное преобразование неравенства .... ***0 баллов за все последующие действия,***
– в ответ включено значение x, при котором основание логарифма равно 1 .... ***снять 1 балл,***
– в ответ включено значение x, при котором основание логарифма равно 0 .... ***снять 1 балл,***
– в ответ включены значения x, при которых основание логарифма отрицательно .... ***не более 3 баллов за задачу.***

2.(6) Доказано, что минимум одной из частей уравнения равен максимуму другой .... ***1 балл,***
– верно разобран только один из случаев знака выражения в скобках .... ***1 балл,***

3.(6) Сделана замена переменных (как в решении) .... ***1 балл,***
– получено кубическое уравнение относительно одной из новых переменных .... ***1 балл,***
– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***
– получены посторонние решения .... ***снять 1 балл.***

4.(8) Найдено отношение расстояний от центров окружностей до прямой AB .... ***1 балл,***
– найдено отношение радиусов окружностей .... ***4 балла.***

5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $9^k \cdot 2$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

6.(8) Построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению .... ***2 балла,***
Сверх этого[1]*:*
– за каждое найденное значение параметра .... ***3 балла,***
– получено 1 лишнее значение параметра .... ***снять 1 балл,***
– получено 2 лишних значения параметра .... ***снять 3 балла.***

7.(8) – Найдено отношение отрезков пункта а) .... ***2 балла,***
– указано, что расстояние между плоскостями равно диаметру сферы .... ***1 балл,***
– найден отрезок пункта б) .... ***3 балла,***
– найден объём призмы .... ***2 балла.***

[1] Если верно построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, то оценка за задачу не может быть менее 2 баллов.

1. Решите уравнение $\frac{2\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 5|\cos x|$.

Ответ: $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2(3\sin x - 4\sin^3 x)}{\sin x} - \frac{(4\cos^3 x - 3\cos x)}{\cos x} = 5|\cos x| \Leftrightarrow 6 - 8\sin^2 x - 4\cos^2 x + 3 = 5|\cos x| \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 5|\cos x| + 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\cos x|$, получаем что $|\cos x| = 1$ или $|\cos x| = \frac{1}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\cos x| = 1$, то $\sin x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $\left(\sqrt[4]{\frac{21}{76}}; 2\cdot\sqrt[4]{\frac{84}{19}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, $\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 2v - u + 2 = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2) = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 1$ или $u = 2$.

Если $v = 1$, то $3 + u^4 = 84$, откуда $u = 3$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $y = uv = 3$.

Если $u = 2$, то $3v^4 + 16v^4 = 84$, откуда $v = \sqrt[4]{\frac{84}{19}}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{\frac{21}{76}}$, $y = uv = 2\cdot\sqrt[4]{\frac{84}{19}}$.

3. Решите неравенство $17^{\frac{5x-3}{3-x}}\cdot 2^{3-x} \leq 68$.

Ответ: $x \in [3 - 6\log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 2, получаем:

$$\frac{5x-3}{3-x}\log_2 17 + (3-x) \leq 2 + \log_2 17 \Leftrightarrow \frac{6x-6}{3-x}\log_2 17 + (1-x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(6\log_2 17 - 3 + x)}{3-x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in [3 - 6\log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник CFM и касается его сторон CM и FM в точках P и K соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ с центром T описана около треугольника PKM.

а) Найдите OM.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника CFT к площади треугольника CFM равно $\frac{5}{8}$. Найдите длину биссектрисы MA треугольника CFM, а также его площадь.

Ответ: а) $OM = 5\sqrt{13}$, б) $MA = \frac{20\sqrt{13}}{3}$, $S = 204$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OKM и OPM прямые, т.е. из точек K и P отрезок OM виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OM как на диаметре, проходит также через точки K и P, значит, это окружность Ω. Отрезок

OM равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OM = 5\sqrt{13}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной CF через B, высоту треугольника, проведённую из вершины M, через MH. Пусть $\angle AMH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in MA$. Из треугольника POM находим, что $PM = \sqrt{OM^2 - OP^2} = 17$.

Поскольку у треугольников CFT и CFM общее основание CF, то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $TA:MA$. Отсюда получаем $\frac{5}{8} = \frac{TA}{MA} = \frac{MA - MT}{MA}$,

$5MA = 8MA - 8MT$, $MA = \frac{8}{3}MT = \frac{8}{3} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{2} = \frac{20\sqrt{13}}{3}$, $AO = AM - OM = \frac{5\sqrt{13}}{3}$.

Поскольку $OB \parallel AH$, $\angle AOB = \angle AMH = \gamma$; из треугольника AOB получаем, что $\cos\gamma = \frac{BO}{AO} = \frac{18}{5\sqrt{13}}$. Из треугольника AMH находим, что $MH = MA\cos\gamma = 24$.

Выразим площадь треугольника CMF двумя способами. С одной стороны, $S_{CMF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot MH = 12 \cdot CF$. С другой стороны, $S_{CMF} = pr$, где $r = 6$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $FB = FK$, $MK = MP$, $CB = CP$, получаем, что $p = FB + CB + MP = CF + MP = CF + 17$, $S_{CMF} = 6(CF + 17)$. Получаем уравнение $12 \cdot CF = 6(CF + 17)$, откуда $CF = 17$, $S_{CMF} = 12 \cdot CF = 204$.

5. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}{*}$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 7, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

6. Дана система уравнений $\begin{cases} \left|16 + 6x - x^2 - y^2\right| + |6x| = 16 + 12x - x^2 - y^2, \\ (a + 15)y + 15x - a = 0. \end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $25\pi - 25\arcsin 0{,}8 + 12$, б) $a = -20, a = -12$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 16 + 6x - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 6x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 \leq 25, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(3; 0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x \leq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\arcsin 0{,}8$, получаем, что его площадь S равна $25\pi - 25\arcsin 0{,}8 + 12$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(y - 1) + 15x + 15y = 0$. Если подставить в него $y = 1$, то получим, что $x = -1$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $(-1; 1)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(0; 4)$ или точку $P(0; -4)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(0;4) \to 4(a+15)-a=0 \Leftrightarrow a=-20.$$
$$P(0;-4) \to -4(a+15)-a=0 \Leftrightarrow a=-12.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром BC пересекает рёбра AC и AB соответственно в точках P и Q, отличных от вершин призмы. Отрезки B_1P и C_1Q пересекаются в точке T, и при этом $B_1P=5$, $TQ=2$.

а) Найдите угол TPA.

б) Найдите отношение $AP:CP$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC=3$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90°, б) $2:1$, в) $V=15$.

Решение. а) Точки P и Q лежат на окружности с диаметром BC; значит, $\angle BPC=90^\circ$, $\angle BQC=90^\circ$ (т.е. BP и CQ – высоты треугольника ABC). Прямая BP – это проекция прямой TP на плоскость основания, при этом $BP \perp PA$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $TP \perp PA$, т.е. $\angle TPA=90^\circ$.

б) Поскольку прямые B_1P и C_1Q пересекаются, то все четыре точки B_1, C_1, P и Q лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые PQ и B_1C_1 лежат в одной плоскости α, а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $PQ \parallel B_1C_1$. Значит, $PQ \parallel BC$. Трапеция $PQBC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании BC равны, и поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AB=AC$).

Треугольники B_1C_1T и PQT подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1Q и BB_1P следует, что $B_1P=C_1Q$, поэтому оба треугольника B_1C_1T и PQT равнобедренные с основаниями B_1C_1 и PQ соответственно. Значит, $PQ:BC=PQ:B_1C_1=TQ:TC_1=TQ:(QC_1-TQ)=TQ:(B_1P-TQ)=2:3$, откуда $\frac{CP}{AP}=\frac{AC-AP}{AP}=\frac{AC}{AP}-1=\frac{BC}{PQ}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

в) Если $AC=3$, то $CP=1$, $AP=2$, $AB=3$; $BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{5}$; $BB_1=\sqrt{B_1P^2-BP^2}=2\sqrt{5}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{5}$, объём призмы равен $V=S_{ABC}\cdot BB_1=15$.

1. Решите уравнение $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2\cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|$.

Ответ: $x = \pm \arcsin\frac{1}{4} + k\pi, k \in Z$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)}{\sin x} - \frac{2\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)}{\cos x} = 5|\sin x| \Leftrightarrow 3 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 x + 6 = 5|\sin x| \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 5|\sin x| + 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\sin x|$, получаем что $|\sin x| = 1$ или $|\sin x| = \frac{1}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\sin x| = 1$, то $\cos x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arcsin\frac{1}{4} + k\pi, k \in Z$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$

Ответ: $\left(3; \frac{1}{3}\right), \left(\sqrt[4]{66}; \frac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, $\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 3v - 2u + 6 = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(u-3) = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = 3$.

Если $v = 2$, то $16 + 16u^4 = 82$, откуда $u = \frac{\sqrt[4]{66}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{4}{\sqrt[4]{66}}$, $x = uv = \sqrt[4]{66}$.

Если $u = 3$, то $v^4 + 81v^4 = 82$, откуда $v = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $x = uv = 3$.

3. Решите неравенство $5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75$.

Ответ: $x \in (-4; -3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 3, получаем:

$$\frac{x+5}{x+4}\log_3 5 + (x+4) \geq 1 + 2\log_3 5 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x+4}\log_3 5 + (x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(-\log_3 5 + x + 4)}{x+4} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in (-4; -3] \cup [\log_3 5 - 4; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{65}}{2}$ с центром T описана около треугольника PQM.

а) Найдите OQ.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $\frac{2}{3}$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ, а также его площадь.

Ответ: а) $OQ = \sqrt{65}$, б) $QA = \frac{3\sqrt{65}}{2}$, $S = 84$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OMQ и OPQ прямые, т.е. из точек M и P отрезок OQ виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OQ как на диаметре, проходит также через точки M и P, значит, это окружность Ω. Отрезок OQ равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OQ=\sqrt{65}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной EF через B, высоту треугольника, проведённую из вершины Q, через QH. Пусть $\angle AQH=\gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O\in QA$. Из треугольника POQ находим, что $PQ=\sqrt{OQ^2-OP^2}=7$.

Поскольку у треугольников EFT и EFQ общее основание EF, то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $TA:QA$. Отсюда получаем $\frac{2}{3}=\frac{TA}{QA}=\frac{QA-QT}{QA}$, $2QA=3QA-3QT$, $QA=3QT=3\cdot\frac{\sqrt{65}}{2}=\frac{3\sqrt{65}}{2}$, $AO=AQ-OQ=\frac{\sqrt{65}}{2}$.

Поскольку $OB\parallel QH$, $\angle AOB=\angle AQH=\gamma$; из треугольника AOB получаем, что $\cos\gamma=\frac{BO}{AO}=\frac{8}{\sqrt{65}}$. Из треугольника AQH находим, что $QH=QA\cos\gamma=12$.

Выразим площадь треугольника EFQ двумя способами. С одной стороны, $S_{EFQ}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot QH=6\cdot EF$. С другой стороны, $S_{EFQ}=pr$, где $r=4$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $FB=FM$, $MQ=QP$, $BE=EP$, получаем, что $p=FB+BE+PQ=EF+PQ=EF+7$, $S_{EFQ}=4(EF+7)$. Получаем уравнение $6\cdot EF=4(EF+7)$, откуда $EF=14$, $S_{CMF}=6\cdot EF=84$.

5. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2160.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 6, 8$ (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=2160$ способов.

6. Дана система уравнений $\begin{cases}\left|9+8y-x^2-y^2\right|+|8y|=16y+9-x^2-y^2,\\(a+4)x-13y+a=0.\end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $25\pi-25\arcsin0{,}6+12$, б) $a=-6, a=-3$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}9+8y-x^2-y^2\geq0,\\8y\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-4)^2+x^2\leq25,\\y\geq0.\end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(0;4)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y\geq0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y\leq0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\arcsin0{,}6$, получаем, что его площадь S равна $25\pi-25\arcsin0{,}6+12$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(x+1)+4x-13y=0$. Если подставить в него $x=-1$, то получим, что $y=-\frac{4}{13}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $\left(-1;-\dfrac{4}{13}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(3;0)$ или точку $P(-3;0)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(3;0)\ \to\ 3(a+4)+a=0 \Leftrightarrow a=-3.$$

$$P(-3;0)\ \to\ -3(a+4)+a=0 \Leftrightarrow a=-6.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N, отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P, и при этом $A_1N=7$, $C_1P=6$.

а) Найдите угол PFA.

б) Найдите отношение $AF:FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB=6$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90°, б) $5:1$, в) $V=21\sqrt{10}$.

Решение. а) Точки F и N лежат на окружности с диаметром AC; значит, $\angle AFC=90^\circ$, $\angle ANC=90^\circ$ (т.е. AN и CF – высоты треугольника ABC). Прямая CF – это проекция прямой C_1F на плоскость основания, при этом $CF\perp AB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $C_1F\perp AB$, т.е. $\angle PFA=90^\circ$.

б) Поскольку прямые C_1F и A_1N пересекаются, то все четыре точки A_1, C_1, F и N лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые FN и A_1C_1 лежат в одной плоскости α, а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $FN\parallel A_1C_1$. Значит, $FN\parallel AC$. Трапеция $AFNC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании AC равны, и поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AB=BC$).

Треугольники A_1C_1P и FNP подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1F и AA_1N следует, что $A_1N=C_1F$, поэтому оба треугольника A_1C_1P и FNP равнобедренные с основаниями A_1C_1 и FN соответственно. Значит, $FN:AC=FN:A_1C_1=FP:PC_1=(FC_1-PC_1):PC_1=(NA_1-PC_1):PC_1=1:6$, откуда $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AB-BF}{BF}=\dfrac{AB}{BF}-1=\dfrac{AC}{FN}-1=6-1=5$.

в) Если $AB=6$, то $BF=1$, $AF=5$, $BC=6$; $CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=\sqrt{35}$; $CC_1=\sqrt{C_1F^2-CF^2}=\sqrt{14}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{14}$, объём призмы равен $V=S_{ABC}\cdot CC_1=21\sqrt{10}$.

1. Решите уравнение $\frac{3\sin 3x}{\sin x}-\frac{2\cos 3x}{\cos x}=7|\cos x|$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+k\pi, k\in Z$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x\sin x\neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{3\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)}{\sin x}-\frac{2\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)}{\cos x}=7|\cos x|\Leftrightarrow 9-12\sin^2 x-8\cos^2 x+6=7|\cos x|\Leftrightarrow 4\cos^2 x-7|\cos x|+3=0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\cos x|$, получаем что $|\cos x|=1$ или $|\cos x|=\frac{3}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\cos x|=1$, то $\sin x=0$). Из второго уравнения находим, что $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+k\pi, k\in Z$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases}2x-\sqrt{xy}-4\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0,\\ 2x^2+x^2y^4=18y^2.\end{cases}$

Ответ: $(2;2),\left(\frac{\sqrt[4]{286}}{4};\sqrt[4]{286}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, $\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases}2uv-v-4u+2=0,\\ 2u^2v^2+\frac{v^6}{u^2}=\frac{18v^2}{u^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(v-2)(2u-1)=0,\\ v^4+2u^4=18.\end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=2$ или $u=\frac{1}{2}$.

Если $v=2$, то $16+2u^4=18$, откуда $u=1$; тогда $y=\frac{v}{u}=2$, $x=uv=2$.

Если $u=\frac{1}{2}$, то $v^4+\frac{1}{8}=18$, откуда $v=\frac{\sqrt[4]{286}}{2}$; тогда $y=\frac{v}{u}=\sqrt[4]{286}$, $x=uv=\frac{\sqrt[4]{286}}{4}$.

3. Решите неравенство $11^{\frac{3x-4}{4-x}}\cdot 3^{4-x}\leq 99$.

Ответ: $x\in\left[4-4\log_3 11;2\right]\cup(4;+\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 3, получаем:

$$\frac{3x-4}{4-x}\log_3 11+(4-x)\leq 2+\log_3 11\Leftrightarrow\frac{4x-8}{4-x}\log_3 11+(2-x)\leq 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(4\log_3 11-4+x)}{4-x}\leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x\in\left[4-4\log_3 11;2\right]\cup(4;+\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 8 с центром O вписана в остроугольный треугольник ENT и касается его сторон EN и NT в точках C и A соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{145}}{2}$ с центром B описана около треугольника ACN.

а) Найдите ON.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника BTE к площади треугольника ENT равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы NL треугольника ENT, а также его площадь.

Ответ: а) $ON=\sqrt{145}$, б) $NL=\frac{5\sqrt{145}}{3}$, $S=360$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OCN и OAN

прямые, т.е. из точек A и C отрезок ON виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке ON как на диаметре, проходит также через точки A и C, значит, это окружность Ω. Отрезок ON равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $ON = \sqrt{145}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной ET через F, высоту треугольника, проведённую из вершины N, через NH. Пусть $\angle LNH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in NL$. Из треугольника CNO находим, что $CN = \sqrt{ON^2 - OC^2} = 9$.

Поскольку у треугольников BTE и ENT общее основание ET, то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $NL : BL$. Отсюда получаем $\frac{7}{10} = \frac{BL}{NL} = \frac{NL - BN}{NL}$,

$7NL = 10NL - 10BN$, $NL = \frac{10}{3}BN = \frac{10}{3} \cdot \frac{\sqrt{145}}{2} = \frac{5\sqrt{145}}{3}$, $LO = NL - ON = \frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Поскольку $OF \parallel NH$, $\angle LOF = \angle LNH = \gamma$; из треугольника LOF получаем, что $\cos\gamma = \frac{FO}{LO} = \frac{12}{\sqrt{145}}$. Из треугольника NLH находим, что $NH = NL\cos\gamma = 20$.

Выразим площадь треугольника ENT двумя способами. С одной стороны, $S_{ENT} = \frac{1}{2} \cdot ET \cdot NH = 10 \cdot ET$. С другой стороны, $S_{ENT} = pr$, где $r = 8$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $TF = TA$, $EF = EC$, $NC = NA$, получаем, что $p = TF + EF + CN = ET + CN = ET + 9$, $S_{ENT} = 8(ET + 9)$. Получаем уравнение $10 \cdot ET = 8(ET + 9)$, откуда $ET = 36$, $S_{CMF} = 10 \cdot ET = 360$.

5. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0, 2, 4, 5, 7, 9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 864.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 864$ способа.

6. Дана система уравнений $\begin{cases} \left|9 - x^2 - y^2 - 2y\right| + \left|-2y\right| = 9 - x^2 - y^2 - 4y, \\ 15y + 3a = (4a + 15)x. \end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $S = 10\pi + 3 - 10\,\mathrm{arctg}\,3$, б) $a = -5$, $a = -3$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a| + |b| = a + b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9 - x^2 - y^2 - 2y \ge 0, \\ -2y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 + x^2 \le 10, \\ y \le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром $(0; -1)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y \le 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y \ge 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\,\mathrm{arctg}\,3$, получаем, что его площадь S равна $10\pi + 3 - 10\,\mathrm{arctg}\,3$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(4x - 3) + 15x - 15y = 0$. Если подставить в него $x = \frac{3}{4}$, то получим, что $y = \frac{3}{4}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из “вершин” сегмента – точку $M(3;0)$ или точку $P(-3;0)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(3;0)\ \to\ 3a=3(4a+15)\Leftrightarrow a=-5.$$
$$P(-3;0)\ \to\ 3a=-3(4a+15)\Leftrightarrow a=-3.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1C_1 пересекает рёбра B_1C_1 и A_1B_1 соответственно в точках N_1 и K_1, отличных от вершин призмы. Отрезки AN_1 и CK_1 пересекаются в точке F, и при этом $AN_1=7$, $CF=4$.

а) Найдите угол FN_1B_1.

б) Найдите отношение $C_1N_1:N_1B_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $BC=8$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90°, б) $1:3$, в) $V=56\sqrt{3}$.

Решение. а) Точки K_1 и N_1 лежат на окружности с диаметром A_1C_1; значит, $\angle A_1K_1C_1=90^\circ$, $\angle A_1N_1C_1=90^\circ$ (т.е. A_1N_1 и C_1K_1 – высоты треугольника $A_1B_1C_1$). Прямая A_1N_1 – это проекция прямой AN_1 на плоскость основания, при этом $A_1N_1\perp B_1C_1$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AN_1\perp B_1C_1$, т.е. $\angle FN_1B_1=90^\circ$.

б) Поскольку прямые AN_1 и CK_1 пересекаются, то все четыре точки N_1, K_1, A и C лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые AC и K_1N_1 лежат в одной плоскости α, а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $AC\parallel K_1N_1$. Значит, $K_1N_1\parallel A_1C_1$. Трапеция $A_1K_1N_1C_1$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании A_1C_1 равны, и поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный ($A_1B_1=B_1C_1$).

Треугольники K_1N_1F и ACF подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1K_1 и AA_1N_1 следует, что $AN_1=CK_1$, поэтому оба треугольника K_1N_1F и ACF равнобедренные с основаниями K_1N_1 и AC соответственно. Значит, $K_1N_1:A_1C_1=K_1N_1:AC=K_1F:CF=(K_1C-CF):CF=(AN_1-CF):CF=3:4$, откуда $\frac{C_1N_1}{N_1B_1}=\frac{C_1B_1-N_1B_1}{N_1B_1}=\frac{C_1B_1}{N_1B_1}-1=\frac{A_1C_1}{N_1K_1}-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$.

в) Если $BC=8$, то $C_1N_1=2$, $B_1N_1=6$, $A_1B_1=8$; $A_1N_1=\sqrt{A_1B_1{}^2-B_1N_1{}^2}=2\sqrt{7}$; $AA_1=\sqrt{AN_1{}^2-A_1N_1{}^2}=\sqrt{21}$.

Значит, площадь основания призмы равна $S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2\sqrt{7}$, объём призмы равен $V=S_{A_1B_1C_1}\cdot AA_1=56\sqrt{3}$.

1. Решите уравнение $\frac{2\sin 3x}{\sin x} - \frac{3\cos 3x}{\cos x} = 7|\sin x|$.

Ответ: $x = \pm \arcsin\frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)}{\sin x} - \frac{3\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)}{\cos x} = 7|\sin x| \Leftrightarrow 6 - 8\sin^2 x - 12\cos^2 x + 9 = 7|\sin x| \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 7|\sin x| + 3 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\sin x|$, получаем что $|\sin x| = 1$ или $|\sin x| = \frac{3}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (так как если $|\sin x| = 1$, то $\cos x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm \arcsin\frac{3}{4} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$.

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt[4]{31}}{12}; \frac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, $\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 3uv - u - 6v + 2 = 0, \\ \frac{v^2}{u^2} + 81v^6u^2 = 2u^2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u - 2)(3v - 1) = 0, \\ 1 + 81v^4u^4 = 2u^4. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u = 2$ или $v = \frac{1}{3}$.

Если $u = 2$, то $1 + 81 \cdot 16v^4 = 32$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{31}}{6}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt[4]{31}}{12}$, $y = uv = \frac{\sqrt[4]{31}}{3}$.

Если $v = \frac{1}{3}$, то $1 + u^4 = 2u^4$, откуда $u = 1$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $y = uv = \frac{1}{3}$.

3. Решите неравенство $2^{\frac{1-x}{3+x}} \cdot 7^{3+x} \geq 56$.

Ответ: $x \in (-3; -2] \cup [4\log_7 2 - 3; +\infty)$.

Решение. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 7, получаем:

$$\frac{1-x}{3+x}\log_7 2 + (3+x) \geq 1 + 3\log_7 2 \Leftrightarrow \frac{-4x-8}{3+x}\log_7 2 + (2+x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(-4\log_7 2 + 3 + x)}{3+x} \geq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in (-3; -2] \cup [4\log_7 2 - 3; +\infty)$.

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник ABC и касается его сторон AB и BC в точках F и T соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{\sqrt{85}}{2}$ с центром M описана около треугольника BFT.

а) Найдите BO.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника ACM к площади треугольника ABC равно $\frac{7}{10}$. Найдите длину биссектрисы BQ треугольника ABC, а также его площадь.

Ответ: а) $BO = \sqrt{85}$, б) $BQ = \frac{5\sqrt{85}}{3}$, $S = 210$.

Решение. а) Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OFB и OTB прямые, т.е. из точек F и T отрезок OB виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OB как на диаметре, проходит также через точки F и T, значит, это окружность Ω. Отрезок OB

равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OB=\sqrt{85}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной AC через L, высоту треугольника, проведённую из вершины B, через BH. Пусть $\angle QBH=\gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O\in BQ$. Из треугольника BOT находим, что $BT=\sqrt{OB^2-OT^2}=7$.

Поскольку у треугольников AMC и ABC общее основание AC, то их площади относятся как высоты, проведённые к этому основанию, а отношение этих высот равно $MQ:BQ$. Отсюда получаем $\frac{7}{10}=\frac{MQ}{BQ}=\frac{BQ-BM}{BQ}$, $7BQ=10BQ-10BM$, $BQ=\frac{10}{3}BM=\frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{85}}{2}=\frac{5\sqrt{85}}{3}$, $OQ=BQ-OB=\frac{2\sqrt{85}}{3}$.

Поскольку $OL\parallel BH$, $\angle LOQ=\angle HBQ=\gamma$; из треугольника LOQ получаем, что $\cos\gamma=\frac{LO}{QO}=\frac{9}{\sqrt{85}}$. Из треугольника BQH находим, что $BH=BQ\cos\gamma=15$.

Выразим площадь треугольника ABC двумя способами. С одной стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BH=\frac{15}{2}\cdot AC$. С другой стороны, $S_{ABC}=pr$, где $r=6$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $AF=AL$, $BF=BT$, $CL=CT$, получаем, что $p=AL+LC+BT=AC+BT=AC+7$, $S_{ABC}=6(AC+7)$. Получаем уравнение $7{,}5\cdot AC=6(AC+7)$, откуда $AC=28$, $S_{ABC}=7{,}5\cdot AC=210$.

5. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 8$ (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=1728$ способов.

6. Дана система уравнений $\begin{cases}\left|4-2x-x^2-y^2\right|+|-2x|=4-4x-x^2-y^2,\\(3a+15)x=3y+a+4.\end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

Ответ: а) $S=5\pi-5\operatorname{arctg}2+2$, б) $a=-10$, $a=2$.

Решение. а) Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}4-2x-x^2-y^2\ge0,\\-2x\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+y^2\le5,\\x\le0.\end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(-1;0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x\le0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x\ge0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\operatorname{arctg}2$, получаем, что его площадь S равна $5\pi-5\operatorname{arctg}2+2$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(3x-1)+15x-3y-4=0$. Если подставить в него $x=\frac{1}{3}$, то получим, что $y=\frac{1}{3}$. Таким образом, это уравнение задаёт прямую, проходящую через точку $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Эта точка лежит в отсечённом от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из "вершин" сегмента – точку $M(0;2)$ или точку $P(0;-2)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем:

$$M(0;2) \to 0 = 6 + a + 4 \Leftrightarrow a = -10.$$
$$P(0;-2) \to 0 = -6 + a + 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром A_1B_1 пересекает рёбра A_1C_1 и B_1C_1 соответственно в точках T_1 и L_1, отличных от вершин призмы. Отрезки BT_1 и AL_1 пересекаются в точке S, и при этом $AL_1 = 7$, $ST_1 = 2$.

а) Найдите угол ST_1A_1.

б) Найдите отношение $A_1T_1 : T_1C_1$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC = 5$. Найдите объём призмы.

Ответ: а) 90°, б) $3:2$, в) $V = 35\sqrt{3}$.

Решение. а) Точки T_1 и L_1 лежат на окружности с диаметром A_1B_1; значит, $\angle A_1L_1B_1 = 90^\circ$, $\angle A_1T_1B_1 = 90^\circ$ (т.е. A_1L_1 и B_1T_1 – высоты треугольника $A_1B_1C_1$). Прямая B_1T_1 – это проекция прямой BT_1 на плоскость основания, при этом $B_1T_1 \perp A_1C_1$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BT_1 \perp A_1C_1$, т.е. $\angle ST_1A_1 = 90^\circ$.

б) Поскольку прямые BT_1 и AL_1 пересекаются, то все четыре точки T_1, L_1, A и B лежат в одной плоскости (назовём её α). Значит, прямые AB и T_1L_1 лежат в одной плоскости α, а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $AB \parallel T_1L_1$. Значит, $T_1L_1 \parallel A_1B_1$. Трапеция $A_1T_1L_1B_1$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая, тогда углы при её основании A_1B_1 равны, и поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ равнобедренный ($A_1C_1 = B_1C_1$).

Треугольники T_1L_1S и ABS подобны по двум углам. Из равенства треугольников BB_1T_1 и AA_1L_1 следует, что $AL_1 = BT_1$, поэтому оба треугольника T_1L_1S и ABS равнобедренные с основаниями T_1L_1 и AB соответственно. Значит, $T_1L_1 : A_1B_1 = T_1L_1 : AB = T_1S : SB = T_1S : (T_1B - T_1S) = T_1S : (AL_1 - T_1S) = 2:5$, откуда $\dfrac{A_1T_1}{T_1C_1} = \dfrac{C_1A_1 - T_1C_1}{T_1C_1} = \dfrac{C_1A_1}{T_1C_1} - 1 = \dfrac{A_1B_1}{T_1L_1} - 1 = \dfrac{5}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}$.

в) Если $AC = 5$, то $C_1T_1 = 2$, $A_1T_1 = 3$, $B_1C_1 = 5$; $B_1T_1 = \sqrt{B_1C_1^2 - C_1T_1^2} = \sqrt{21}$; $BB_1 = \sqrt{BT_1^2 - B_1T_1^2} = 2\sqrt{7}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{21}$, объём призмы равен $V = S_{A_1B_1C_1} \cdot BB_1 = 35\sqrt{3}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(6) Получено уравнению относительно $\sin x$ $(\cos x)$ .... ***2 балла,***
– за каждый случай раскрытия модуля........ ***2 балла,***
– не сделан (неверно сделан отбор), возникающий за счёт разбора случаев при раскрытии модуля .... ***снять 2 балла,***
– не учтено ОДЗ (нули знаменателя) .... ***снять 1 балл.***

2.(6) Первое уравнение разложено на множители .... ***2 балла,***
– за каждый из двух полученных случаев .... ***2 балла.***

3.(6) Неэквивалентное преобразование неравенства .... ***0 баллов за все последующие действия,***
– неравенство сведено к дробно-рациональному .... ***2 балла,***
– неравенство преобразовано к виду $\dfrac{P(x)Q(x)}{R(x)} \geq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – линейные функции переменной x (*или* к виду $\dfrac{G(x)}{R(x)} \geq 0$, где $R(x)$ – линейная функция, $G(x)$ – квадратичная функция и при этом найдены нули $G(x)$) .... ***2 балла,***
– границы промежутков указаны в ответе в неупрощённой форме .... ***снять 1 балл,***
– точки расположены на числовой прямой в неправильном порядке .... ***снять 1 балл,***
– угадано целое значение x, при котором неравенство обращается в равенство ... ***баллы не добавляются.***

4.(8) Решён пункт а) .... ***2 балла,***
– за каждый из вопросов пункта б) (биссектриса, площадь) .... ***3 балла.***

5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 6 (на 15) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

6.(8) а) (4) Построено множество .... ***3 балла,***
– найдена его площадь .... ***1 балл.***

б) (4) установлено, что все прямые, заданные вторым уравнением системы, проходят через одну точку .... ***2 балла,***
– за каждое найденное значение параметра .... ***по 1 баллу;***

<u>при ином способе решения:</u>
– указаны необходимые условия того, что прямая и сегмент имеют ровно одну общую точку (касание или прямая проходит через "вершину" сегмента) .... ***1 балл,***
– показано, что касательных нет .... ***1 балл,***
– найдены значения параметра, при которых прямая проходит через "вершины" сегмента .... ***1 балл,***
– проверено, что эти прямые не имеют общих точек с окружностью .... ***1 балл.***

7.(8) Показано, что отрезок, соединяющий точки пересечения сферы с рёбрами параллелен данному диаметру сферы .... ***2 балла,***
– доказано, что в основании призмы лежит равнобедренный треугольник (или эквивалентное утверждение) .... ***1 балл,***
– найден угол пункта а) .... ***1 балл,***
– найдено отношение пункта б) .... ***2 балла,***
– найден объём призмы .... ***2 балла.***

1. Решите неравенство $\left(x^2-3x+3\right)^{4x^3+5x^2} \le \left(x^2-3x+3\right)^{2x^3+18x}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0;1] \cup \{2\}$.

Решение. Основание степени положительно при всех x, поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(\left(4x^3+5x^2\right)-\left(2x^3+18x\right)\right) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)x\left(2x^2+5x-18\right) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 x(2x+9) \le 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0;1] \cup \{2\}$.

2. Решите уравнение $\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|$.

Ответ: $x = -\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2k\pi$, $x = -\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\sin x \sin 6x}{2\sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2\sin x \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{\sin x \cos 3x}{\cos x} = 2|\sin x \cos x| \Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = 2|\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \ge 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = 2\sin x \cos x$, откуда либо $\sin x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$. Следовательно, $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\cos x = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = -2\sin x \cos x$, откуда $4\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$. Следовательно, $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \frac{-1-\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) - 2(x+y) + 10 = 0, \\ xy\left(x^2-y^2\right) - 2\left(x^2-y^2\right) - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-2)(x+y) = -10, \\ (xy-2)(x-y)(x+y) = 30. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -3$, откуда $y = x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(x^2+3x-2\right)(2x+3) = -10$, $2x^3 + 9x^2 + 5x + 4 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -4$. Выделив множитель $(x+4)$, получаем $(x+4)\left(2x^2+x+1\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -4$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-4; -1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M. Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE. Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC, угол CBD и площадь треугольника ABC.

Ответ: $AH = 12$, $\angle CBD = 30^\circ$, $S_{ABC} = 24\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, точку касания прямой DE с окружностью через T, а радиус окружности через R. Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины,

$DM=\frac{1}{2}BM=R$, $CE=\frac{3}{2}CM=6$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ODT катет $OT=R$, а гипотенуза $OD=2R$. Следовательно, $\angle TDO=30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$, $\angle MBC=\angle MDE=30^\circ$. Из треугольника BMC находим, что $BC=MC\operatorname{ctg}30^\circ=4\sqrt{3}$.

Высота AH исходного треугольника вдвое больше, чем CE (т.к. CE – средняя линия треугольника ABH). Значит, $AH=12$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}BC\cdot AH=24\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=2592$ способа.

6. Дана система уравнений $\begin{cases} |15x|+|8y|+|120-15x-8y|=120, \\ \left(x-4\cos\frac{a\pi}{2}\right)^2+\left(y-\frac{15}{2}\right)^2=\left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 60, б) $a=-36, a=32$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 15x\ge 0, \\ 8y\ge 0, \\ 120-15x-8y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ 15x+8y\le 120. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(8;0)$, $G(0;15)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 60.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a=-2$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$4\cos\frac{a\pi}{2}=4,\ \left(\frac{a+2}{4}\right)^2=\left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a=-36$ и $a=32$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r=\sqrt{\frac{35}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL\parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω. Найдите объём призмы и длину отрезка AK.

Ответ: $V=420\sqrt{3}$, $AK=8$ *или* $AK=4$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r. Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3}=2\sqrt{35}$, площадь основания $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{35}\right)^2=35\sqrt{3}$, объём призмы равен $Sh=35\sqrt{3}\cdot 12=420\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость LAC также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями LAC и LA_1C_1 лежат на отрезках LQ и LQ_1, где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1.

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q. Обозначим центр окружности ω, получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O, а точки касания отрезков LQ_1, LQ и QQ_1 с окружностью – G, P и J соответственно. Высота LH треугольника LQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $LH=3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника LQQ_1 двумя способами: $S_0=pr$ и $S_0=\frac{1}{2}LH\cdot QQ_1=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 12=18r$, где p – полупериметр треугольника LQQ_1. Следовательно, $p=18$. Обозначим $QJ=x$; тогда $Q_1G=Q_1J=12-x$, $PQ=x$, $LG=LP=\frac{1}{2}\left(36-2x-2(12-x)\right)=6$.

Значит, $QQ_1=12$, $QL=6+x$, $Q_1L=18-x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0=\sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12-x)}$, откуда $\sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12-x)}=18r$, $x(12-x)=3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2-12x+35=0$, следовательно, $x=5$ или $x=7$.

Тогда $QL=13$ или $QL=11$, а так как $BL=\sqrt{QL^2-BQ^2}=\sqrt{QL^2-9r^2}$, то $BL=4$ или $BL=8$. Остаётся заметить, что $AK=BL=QH$.

1. Решите неравенство $\left(x^2-x+1\right)^{16x^3-6x} \le \left(x^2-x+1\right)^{13x^2+x^3}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$.

Решение. Основание степени положительно при всех x, поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(x^2-x\right)\left(\left(16x^3-6x\right)-\left(13x^2+x^3\right)\right)\le 0 \;\Leftrightarrow (x-1)x^2\left(15x^2-13x-6\right)\le 0 \;\Leftrightarrow (x-1)x^2(5x-6)(3x+1)\le 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{0\} \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x - \sin 2x} = -3 \cdot |\sin 2x|$

Ответ: $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{57}-3}{8} + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin \frac{3-\sqrt{57}}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\cos x \sin 6x}{2\sin x \cos 3x} = -3|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2\cos x \sin 3x \cos 3x}{\sin x \cos 3x} = -3|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{\cos x \sin 3x}{\sin x} = -3|\sin x \cos x| \Leftrightarrow \cos x\left(3-4\sin^2 x\right) = -3|\sin x \cos x|$$

.

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \ge 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\cos x\left(3-4\sin^2 x\right) = -3\sin x \cos x$, откуда либо $\cos x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{8}$. Уравнение $\sin x = \frac{3+\sqrt{57}}{8}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{3-\sqrt{57}}{8}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{3-\sqrt{57}}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\cos x\left(3-4\sin^2 x\right) = 3\sin x \cos x$, откуда $4\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{8}$. Уравнение $\sin x = \frac{-3-\sqrt{57}}{8}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{57}-3}{8}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{57}-3}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(2;1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 3(x-y) + 1 = 0, \\ xy\left(x^2-y^2\right) - 3\left(x^2-y^2\right) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)(x-y) = -1, \\ (xy-3)(x-y)(x+y) = -3. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 3$, откуда $y = -x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(-x^2+3x-3\right)(2x-3) = -1$, $2x^3 - 9x^2 + 15x - 10 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x = 2$. Выделив множитель $(x-2)$, получаем $(x-2)\left(2x^2-5x+5\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 2$. Тогда $y = 1$, и пара чисел $(2;1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке G. Окружность, построенная на отрезке LG как на диаметре, проходит через вершину M и касается прямой DE. Известно, что $GM = 6$. Найдите высоту KT треугольника KLM, угол LGM и площадь треугольника KLM.

Ответ: $KT = 18$, $\angle LGM = 60^\circ$, $S_{KLM} = 54\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, точку касания прямой DE с окружностью через S, а радиус окружности через R. Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, $DG=\frac{1}{2}LG=R$, $ME=\frac{3}{2}GM=9$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ODS катет $OS=R$, а гипотенуза $OD=2R$. Следовательно, $\angle SDO=30^{\circ}$. Отрезок DE – средняя линия треугольника KLM, поэтому $DE\parallel LM$, $\angle GLM=\angle GDE=30^{\circ}$. Из треугольника GLM находим, что $LM=MG\operatorname{ctg}30^{\circ}=6\sqrt{3}$, $\angle LGM=60^{\circ}$.

Высота KT исходного треугольника вдвое больше, чем ME (т.к. ME – средняя линия треугольника KLT). Значит, $KT=18$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}KT\cdot LM=54\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1296.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 4 или 8 (3 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot 6\cdot 6\cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $3\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 2=1296$ способов.

6. Дана система уравнений $\begin{cases}|3x|+|4y|+|48-3x-4y|=48,\\ (x-8)^2+\left(y+6\cos\frac{a\pi}{2}\right)^2=(a+4)^2.\end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 96; б) $a=6$, $a=-14$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}3x\geq 0,\\ 4y\geq 0,\\ 48-3x-4y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ y\geq 0,\\ 3x+4y\leq 48.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(16;0)$, $G(0;12)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 96.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a=-4$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$-6\cos\frac{a\pi}{2}=6,\ (a+4)^2=10^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a=-14$ и $a=6$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6. Сфера Ω радиуса $r=\sqrt{\frac{8}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки M и K такие, что $KM\parallel AB$, а плоскости ACK и MB_1C_1 касаются сферы Ω. Найдите объём призмы и длину отрезка BK.

Ответ: $V=48\sqrt{3}$, $BK=5$ *или* $BK=1$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r. Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3}=4\sqrt{2}$, площадь основания $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{2}\right)^2=8\sqrt{3}$, объём призмы равен $Sh=8\sqrt{3}\cdot 6=48\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость A_1C_1K также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями ACK и A_1C_1K лежат на отрезках KQ и KQ_1, где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1.

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q. Обозначим центр окружности ω, получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O, а точки касания отрезков KQ_1, QQ_1 и KQ с окружностью – G, J и P соответственно. Высота KH треугольника KQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $KH=3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника KQQ_1 двумя способами: $S_0=pr$ и $S_0=\frac{1}{2}KH\cdot QQ_1=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 6=9r$, где p – полупериметр треугольника KQQ_1. Следовательно, $p=9$. Обозначим $QJ=x$; тогда $Q_1G=Q_1J=6-x$, $PQ=x$, $KG=KP=\frac{1}{2}\left(18-2x-2(6-x)\right)=3$.

Значит, $QQ_1=6$, $QK=3+x$, $Q_1K=9-x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0=\sqrt{9\cdot 3\cdot x\cdot(6-x)}$, откуда $\sqrt{9\cdot 3\cdot x\cdot(6-x)}=9r$, $x(6-x)=3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2-6x+8=0$, следовательно, $x=2$ или $x=4$.

Тогда $QK=7$ или $QK=5$, а так как $BK=\sqrt{QK^2-BQ^2}=\sqrt{QK^2-9r^2}$, то $BK=5$ или $BK=1$.

1. Решите неравенство $\left(x^2+3x+3\right)^{5x^3-3x^2} \le \left(x^2+3x+3\right)^{3x^3+5x}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

Решение. Основание степени положительно при всех x, поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(x^2+3x+2\right)\left(\left(5x^3-3x^2\right)-\left(3x^3+5x\right)\right) \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)x\left(2x^2-3x-5\right) \le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)^2 x(2x-5) \le 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in (-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin 5x + \sin 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = -4 \cdot |\sin 2x|$.

Ответ: $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2k\pi$, $x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\cos x \sin 6x}{2\sin 3x \cos x} = -4 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2\sin 3x \cos 3x}{\sin 3x} = -4 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \cos 3x = -4 \cdot |\sin x \cos x| \Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) = -4 \cdot |\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \ge 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) = -4\sin x \cos x$, откуда либо $\cos x = 0$ (что невозможно, так как знаменатель в левой части исходного уравнения обращается в ноль), либо $4\cos^2 x - 3 = -4\sin x$, $4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\cos x\left(4\cos^2 x - 3\right) = 4\sin x \cos x$, откуда $4\sin^2 x + 4\sin x - 1 = 0$. Следовательно, $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Уравнение $\sin x = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\sin x = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, учитывая ограничение, получаем $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3 y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-3; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) + 3(x+y) + 24 = 0, \\ xy\left(x^2-y^2\right) + 3\left(x^2-y^2\right) - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+3)(x+y) = -24, \\ (xy+3)(x-y)(x+y) = 48. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -2$, откуда $y = x + 2$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(x^2+2x+3\right)(2x+2) = -24$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -3$. Выделив множитель $(x+3)$, получаем $(x+3)\left(x^2+5\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -3$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-3; -1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке K. Окружность, построенная на отрезке CK как на диаметре, проходит через вершину B и касается прямой DE. Известно, что $DK = 3$. Найдите высоту AH треугольника ABC, радиус окружности и площадь треугольника ABC.

Ответ: $AH = 18$, $R = 6$, $S_{ABC} = 54\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, точку касания прямой DE с окружностью через T, а радиус окружности через R. Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины,

$EK = \frac{1}{2}CK = R$, $BD = 3DK = 9$, $BK = 2DK = 6$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике OET катет $OT = R$, а гипотенуза $OE = 2R$. Следовательно, $\angle TEO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$, $\angle KCB = \angle KED = 30^\circ$. Из треугольника BKC находим, что $BC = BK \operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}$, $2R = CK = \dfrac{BK}{\sin 30^\circ} = 12$.

Высота AH исходного треугольника вдвое больше, чем BD (т.к. BD – средняя линия треугольника ACH). Значит, $AH = 18$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2} BC \cdot AH = 54\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,6,7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 432.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$ способа.

6. Дана система уравнений $\begin{cases} |5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60, \\ \left(x + 6\sin\dfrac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a+3}{4}\right)^2. \end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 30, б) $a = -29, a = 23$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x \ge 0, \\ 12y \ge 0, \\ 60 - 5x - 12y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 5x + 12y \le 60. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(12; 0)$, $G(0; 5)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 30.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -3$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$-6\sin\frac{a\pi}{2} = 6, \ \left(\frac{a+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -29$ и $a = 23$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки T и F такие, что $FT \parallel BC$, а плоскости ABT и FA_1C_1 касаются сферы Ω. Найдите объём призмы и длину отрезка CT.

Ответ: $V = 405\sqrt{3}$, $CT = 9$ *или* $CT = 3$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r. Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3}=3\sqrt{15}$, площадь основания $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3\sqrt{15}\right)^2=\frac{135\sqrt{3}}{4}$, объём призмы равен $Sh=\frac{135\sqrt{3}}{4}\cdot 12=405\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость FAC также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями FAC и FA_1C_1 лежат на отрезках FQ и FQ_1, где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1.

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q. Обозначим центр окружности ω, получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O, а точки касания отрезков FQ_1, QQ_1 и FQ с окружностью – G, J и P соответственно. Высота FH треугольника FQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $FH=3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника FQQ_1 двумя способами: $S_0=pr$ и $S_0=\frac{1}{2}FH\cdot QQ_1=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 12=18r$, где p – полупериметр треугольника FQQ_1. Следовательно, $p=18$. Обозначим $QJ=x$; тогда $Q_1G=Q_1J=12-x$, $PQ=x$, $FG=FP=\frac{1}{2}\left(36-2x-2(12-x)\right)=6$.

Значит, $QQ_1=12$, $QF=6+x$, $Q_1F=18-x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0=\sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12-x)}$, откуда $\sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12-x)}=18r$, $x(12-x)=3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2-12x+\frac{135}{4}=0$, следовательно, $x=\frac{9}{2}$ или $x=\frac{15}{2}$.

Тогда $QF=\frac{21}{2}$ или $QF=\frac{27}{2}$, а так как $BF=\sqrt{QF^2-BQ^2}=\sqrt{QF^2-9r^2}$, то $BF=3$ или $BF=9$. Остаётся заметить, что $CT=BF=QH$.

1. Решите неравенство $\left(x^2+x+1\right)^{4x^3+x^2} \geq \left(x^2+x+1\right)^{x-2x^3}$.

Ответ: $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Решение. Основание степени положительно при всех x, поэтому данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(x^2+x\right)\left(\left(4x^3+x^2\right)-\left(x-2x^3\right)\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)x^2\left(6x^2+x-1\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)x^2(2x+1)(3x-1) \geq 0,$$

откуда с помощью метода интервалов находим, что $x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\sin 8x + \sin 4x}{\cos 5x + \cos x} = 6|\sin 2x|$.

Ответ: $x = -\arccos\dfrac{\sqrt{13}-3}{4} + 2k\pi$, $x = -\arccos\dfrac{3-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $x = k\pi$, $k \in Z$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\cos 2x \sin 6x}{2\cos 3x \cos 2x} = 6 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2\sin 3x \cos 3x}{\cos 3x} = 6 \cdot |\sin 2x| \Leftrightarrow \sin 3x = 6 \cdot |\sin x \cos x| \Leftrightarrow \sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right) = 6 \cdot |\sin x \cos x|.$$

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x \geq 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 6\sin x \cos x$, откуда либо $\sin x = 0$ и $x = k\pi, k \in Z$, либо $4\cos^2 x - 1 = 6\cos x$, $4\cos^2 x - 6\cos x - 1 = 0$. Следовательно, $\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\cos x = \dfrac{3-\sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\dfrac{3-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвёртой четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 1\right) = -6\sin x \cos x$, откуда $4\cos^2 x + 6\cos x - 1 = 0$. Следовательно, $\cos x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\cos x = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\dfrac{\sqrt{13}-3}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(4;1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 5(x-y) + 3 = 0, \\ xy\left(x^2-y^2\right) - 5\left(x^2-y^2\right) + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-5)(x-y) = -3, \\ (xy-5)(x-y)(x+y) = -15. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 5$, откуда $y = -x + 5$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(-x^2+5x-5\right)(2x-5) = -3$, $2x^3 - 15x^2 + 35x - 28 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x = 4$. Выделив множитель $(x-4)$, получаем $(x-4)\left(2x^2-7x+7\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Тогда $y = 1$, и пара чисел $(4;1)$ является единственным решением системы.

4. В треугольнике KLM медианы LD и ME пересекаются в точке T. Окружность, построенная на отрезке MT как на диаметре, проходит через вершину L и касается прямой DE. Известно, что $DT = 2$. Найдите высоту KH треугольника KLM, угол ETD и площадь треугольника KLM.

Ответ: $KH = 12$, $\angle ETD = 60^\circ$, $S_{KLM} = 24\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, точку касания прямой DE с окружностью через S, а радиус окружности через R. Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, $ET = \frac{1}{2}MT = R$, $LD = 3DT = 6$, $LT = 2DT = 4$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике OES катет $OS = R$, а гипотенуза $OE = 2R$. Следовательно, $\angle SEO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника KLM, поэтому $DE \parallel LM$, $\angle TML = \angle TED = 30^\circ$. Из треугольника TLM находим, что $LM = TL\operatorname{ctg}30^\circ = 4\sqrt{3}$. $\angle ETD = \angle LTM = 60^\circ$.

Высота KH исходного треугольника вдвое больше, чем LD (т.к. LD – средняя линия треугольника KMH). Значит, $KH = 12$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}KH \cdot LM = 24\sqrt{3}$.

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 4 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2 = 5184$ способа.

6. Дана система уравнений $\begin{cases} |4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24, \\ (x-3)^2 + \left(y - 4\sin\frac{a\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2. \end{cases}$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

Ответ: а) 24; б) $a = -11, a = 9$.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x \ge 0, \\ 3y \ge 0, \\ 24 - 4x - 3y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 4x + 3y \le 24. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(6;0)$, $G(0;8)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 24.

Второе уравнение исходной системы задаёт окружность (или точку при $a = -1$). Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, а её радиус равен половине гипотенузы, откуда получаем условия

$$4\sin\frac{a\pi}{2} = 4, \ \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = (5)^2.$$

Второе уравнение задаёт два значения параметра: $a = -11$ и $a = 9$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 5. Сфера Ω радиуса $r = \frac{\sqrt{33}}{4}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках CC_1 и BB_1 выбраны соответственно точки F и L такие, что $FL \parallel BC$, а плоскости LAC и FA_1B_1 касаются сферы Ω. Найдите объём призмы и длину отрезка CF.

Ответ: $V = \frac{495\sqrt{3}}{16}$, $CF = 2$ *или* $CF = 3$.

Решение. Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r. Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{11}}{2}$, площадь основания $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)^2=\frac{99\sqrt{3}}{16}$, объём призмы равен $Sh=\frac{99\sqrt{3}}{16}\cdot 5=\frac{495\sqrt{3}}{16}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех её граней, следует, что плоскость LA_1C_1 также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями LAC и LA_1C_1 лежат на отрезках LQ и LQ_1, где точки Q и Q_1 – середины рёбер AC и A_1C_1.

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q. Обозначим центр окружности ω, получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O, а точки касания отрезков LQ_1, QQ_1 и LQ с окружностью – G, J и P соответственно. Высота LH треугольника LQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, то есть $LH=3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника LQQ_1 двумя способами: $S_0=pr$ и $S_0=\frac{1}{2}LH\cdot QQ_1=\frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 5=\frac{15r}{2}$, где p – полупериметр треугольника LQQ_1. Следовательно, $p=\frac{15}{2}$. Обозначим $QJ=x$; тогда $Q_1G=Q_1J=5-x$, $PQ=x$, $LG=LP=\frac{1}{2}\left(15-2x-2(5-x)\right)=\frac{5}{2}$.

Значит, $QQ_1=5$, $QL=\frac{5}{2}+x$, $Q_1L=\frac{15}{2}-x$. Тогда формула Герона даёт, что $S_0=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot x\cdot(5-x)}$, откуда $\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot x\cdot(5-x)}=\frac{15r}{2}$, $x(5-x)=3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2-5x+\frac{99}{16}=0$, следовательно, $x=\frac{11}{4}$ или $x=\frac{9}{4}$.

Тогда $QL=\frac{21}{4}$ или $QL=\frac{19}{4}$, а так как $BL=\sqrt{QL^2-BQ^2}=\sqrt{QL^2-9r^2}$, то $BL=3$ или $BL=2$. Остаётся заметить, что $CF=BL=QH$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(6) Не указано, что основание степени положительно .... ***баллы не снимать,***
– неэквивалентное преобразование неравенства .... ***0 баллов за все последующие действия,***
– за рассмотрение каждого из случаев (основание степени > 1, основание степени < 1, основание степени равно 1) .... ***2 балла,***

при ином способе решения:
– неравенство сведено к алгебраическому .... ***2 балла,***
– получено разложение на множители .... ***1 балл,***
– при решении методом интервалов потеряна изолированная точка .... ***снять 2 балла.***

2.(6) Уравнение приведено к виду $\frac{\cos 3x \sin x}{\cos x} = a|\sin 2x|$ (билет 33), $\frac{\sin 3x \cos x}{\sin x} = a|\sin 2x|$ (билет 34), $\cos 3x = a|\sin 2x|$ (билет 35), $\sin 3x = a|\sin 2x|$ (билет 36) .... ***1 балл,***
– в каждом из двух случаев раскрытия модуля получено уравнение относительно $\sin x$ ($\cos x$) .... ***2 балла (по 1 баллу за случай),***
– решено одно из этих уравнений (или оба) .... ***1 балл,***
– сделан отбор, возникающий за счёт знака модуля .... ***2 балла (по 1 баллу за случай),***
– в вариантах 33–35 не отброшена серия $x = k\pi$, в варианте 36 потеряна серия $x = k\pi$ .... ***снять 1 балл,***
– неэквивалентное преобразование с модулем (например, $|\sin 2x| = 2\sin x|\cos x|$) .... ***не более 2 баллов за задачу.***

3.(6) Получено линейное соотношение между переменными (в билете 33 – $y = x + 3$, в билете 34 – $x + y = 3$, в билете 35 – $y = x + 2$, в билете 36 – $x + y = 5$) .... ***3 балла,***
– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***
– получено решение системы.. ***1 балл.***

4.(8) Дан ответ на один из вопросов задачи .... ***2 балла,***
– дан ответ на два вопроса задачи .... ***5 баллов.***

5.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

6.(8) а) (4) Построено множество .... ***3 балла,***
– найдена его площадь .... ***1 балл.***

б) (4) указано, что ровно три решения возможны тогда и только тогда, когда второе уравнение задаёт окружность, описанную около треугольника, задаваемого первым уравнением .... ***2 балла,***
– за каждое найденное значение параметра .... ***по 1 баллу.***

7.(8) – Найден объём призмы .... ***1 балл,***
– найден отрезок .... ***7 баллов.***