1. Решите уравнение $x^{\log_2(8x)}=\dfrac{x^7}{8}$.

Ответ. $x=2$, $x=8$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем $\log_2 x\cdot\log_2(8x)=\log_2 x^7-\log_2 8$, что равносильно следующему: $\log_2^2 x+3\log_2 x=7\log_2 x-3 \Leftrightarrow \log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$, откуда $\log_2 x=1$ или $\log_2 x=3$; $x=2$ или $x=8$.

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\left|\cos 2x+\dfrac{1}{2}\right|=\sin^2 3x-\sin x\sin 3x$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin^2 3x-\sin x\sin 3x=\sin 3x(\sin 3x-\sin x)=\sin 3x\cdot 2\cos 2x\sin x=\cos 2x\cdot(2\sin x\sin 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(-2\cos^2 2x+\cos 2x+1\right)=\cos 2x(2\cos 2x+1)(1-\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\dfrac{1}{4}\cdot|2t+1|=t(2t+1)(1-t)$. Возможны три случая.

а) $t=-\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{1}{4}=-t^2+t$, $t^2-t+\dfrac{1}{4}=0$, $t=\dfrac{1}{2}$.

в) $t<-\dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{1}{4}=-t^2+t$, $t^2-t-\dfrac{1}{4}=0$, $t=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t<-\dfrac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что k^2+2k делится нацело на 303.

Ответ. 3200.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+2)\vdots(3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k\vdots 101$, т.е. $k=101p, p\in Z$. Тогда получаем $101p(101p+2)\vdots(3\cdot 101)\Leftrightarrow p(101p+2)\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=303q$, $k=303q+202$, $q\in Z$.

б) $(k+2)\vdots 101$, т.е. $k=101p+99, p\in Z$. Тогда получаем $(101p+99)(101p+101)\vdots(3\cdot 101)\Leftrightarrow(101p+99)(p+1)\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=303q+99$, $k=303q+301$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 202, 99, 301$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $242400=303\cdot 800$, получаем $4\cdot 800=3200$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}3x\ge 2y+16,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+25-26x^2-26y^2=72xy.\end{cases}$

Ответ. $(6;1)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $36x^2+36y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2+25+10x^2+10y^2=36x^2+36y^2+72xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+5\right)^2=(6x+6y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+5=6x+6y,\\ x^2+y^2+5=-6x-6y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-3)^2+(y-3)^2=13,\\ (x+3)^2+(y+3)^2=13.\end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центрами в точках $(3;3)$ и $(-3;-3)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=\frac{3x}{2}-8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+\left(\frac{3x}{2}-11\right)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{13}{4}x^2-39x+117=0,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6,\\ y=1.\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2+(y+3)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+\left(\frac{3x}{2}-5\right)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{13}{4}x^2-9x+21=0,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(-3;-3)$ и $(3;3)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(6;1)$.

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK:KS=2:3$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $CS:CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{3}$, б) $V=\frac{9\pi}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHK, BHK, CHK, DHK. У них сторона HK общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHK и DHK прямые, угол AHK острый, а угол CHK тупой, отсюда следует, что $CK>BK=DK>AK$.

Так как точка K равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BK=DK=SK$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $AK=2x$, $SK=3x$. Тогда $BS=5x$, $BK=3x$. Из равнобедренного треугольника BKS находим, что $\cos\angle ASB=\frac{BS}{2BK}=\frac{5}{6}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{5x}{\sqrt{3}}$. Значит, $\frac{CS}{CD}=\frac{AS}{AB}=\sqrt{3}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки K до плоскости BSD. Так как $KS:AS=3:5$, то это расстояние равно $\frac{3}{5}$ расстояния от точки A до плоскости BSD, т.е $\frac{3}{5}AH=\frac{3}{5\sqrt{2}}AB=x\sqrt{\frac{3}{2}}$. Образующая конуса – это отрезок $KS=3x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{9x^2-\frac{3}{2}x^2}=x\sqrt{\frac{15}{2}}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{15}{2}x^2\cdot x\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{5\pi\sqrt{3}x^3}{2\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника ASH по теореме Пифагора получаем $25x^2=\frac{25x^2}{6}+25$, откуда $x=\sqrt{\frac{6}{5}}$. Значит, $V=\frac{9\pi}{\sqrt{5}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases}y=-b-x^2,\\ x^2+y^2+8a^2=4+4a(x+y)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\le 2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-2a)^2+(y-2a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(2a;\,2a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\le y\le x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y=x-2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $-b-x^2=x-2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b=2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_{\text{в}}\ge y_0$, т.е. $-b\ge -2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$, $b\le 2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

7. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1=4$, $BK_2=6$, и $AB=16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $AK=\frac{32}{5}$, б) $\angle CAB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые AO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов A и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{6R}{r}$. Аналогично $AK=\frac{4R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r}=16$, $AK=\frac{32}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{3}{5}r$, $\angle OAB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle CAB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

1. Решите уравнение $x^{\log_3\left(27x^2\right)}=\frac{x^9}{81}$.

Ответ. $x=3$, $x=9$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем $\log_3 x\cdot\log_3\left(27x^2\right)=\log_3 x^9-\log_3 81$, что равносильно следующему: $2\log_3^2 x+3\log_3 x=9\log_3 x-4 \Leftrightarrow \log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$, откуда $\log_3 x=1$ или $\log_3 x=2$; $x=3$ или $x=9$.

2. Решите уравнение $\frac{1}{2}\left|\cos 2x-\frac{1}{2}\right|=\cos^2 3x+\cos x\cos 3x$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos^2 3x+\cos x\cos 3x=\cos 3x(\cos x+\cos 3x)=\cos 3x\cdot 2\cos 2x\cos x=\cos 2x\cdot(2\cos x\cos 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x+\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(2\cos^2 2x+\cos 2x-1\right)=\cos 2x(\cos 2x+1)(2\cos 2x-1).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\frac{1}{4}\cdot|2t-1|=t(t+1)(2t-1)$. Возможны три случая.

а) $t=\frac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>\frac{1}{2}$. Получаем $\frac{1}{4}=t^2+t$, $t^2+t-\frac{1}{4}=0$, $t=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t>\frac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

в) $t<\frac{1}{2}$. Получаем $-\frac{1}{4}=t^2+t$, $t^2+t+\frac{1}{4}=0$, $t=-\frac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\frac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что k^2+k делится нацело на 505.

Ответ. 2800.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+1)\,\vdots\,(5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k\,\vdots\,101$, т.е. $k=101p, p\in Z$. Тогда получаем $101p(101p+1)\,\vdots\,(5\cdot 101)\Leftrightarrow p(101p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=505q$, $k=505q+404$, $q\in Z$.

б) $(k+1)\,\vdots\,101$, т.е. $k=101p+100, p\in Z$. Тогда получаем $(101p+100)(101p+101)\,\vdots\,(5\cdot 101)\Leftrightarrow(101p+100)(p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=505q+100$, $k=505q+504$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 404, 100, 504$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $353500=505\cdot 700$, получаем $4\cdot 700=2800$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}2x\geq 14+y,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+144-40x^2-40y^2=128xy.\end{cases}$

Ответ. $(8;2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $64x^2+64y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2+144+24x^2+24y^2=64x^2+64y^2+128xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+12\right)^2=(8x+8y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+12=8x+8y,\\ x^2+y^2+12=-8x-8y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-4)^2=20,\\ (x+4)^2+(y+4)^2=20.\end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центрами в точках $(4;4)$ и $(-4;-4)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=2x-14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2+(2x-18)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-80x+320=0,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+4)^2+(y+4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)^2+(2x-10)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-32x+96=0,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(4;4)$ и $(-4;-4)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(8;2)$.

5. На ребре SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $BL:LS=2:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS:CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 7. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{5}{3}}$, б) $V=\frac{125\pi}{\sqrt{21}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHL, BHL, CHL, DHL. У них сторона HL общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы AHL и CHL прямые, угол BHL острый, а угол DHL тупой, отсюда следует, что $DL>AL=CL>BL$.

Так как точка L равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $AL=CL=SL$. Значит, точки A, C и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $BL=2x$, $SL=5x$. Тогда $AS=7x$, $AL=5x$. Из равнобедренного треугольника ALS находим, что $\cos\angle LSA=\frac{AS}{2SL}=\frac{7}{10}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{7x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Значит, $\frac{AS}{CD}=\frac{AS}{AB}=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки L до плоскости ASC. Так как $LS:BS=5:7$, то это расстояние равно $\frac{5}{7}$ расстояния от точки B до плоскости ASC, т.е $\frac{5}{7}BH=\frac{5}{7\sqrt{2}}AB=x\sqrt{\frac{15}{2}}$. Образующая конуса – это отрезок $LS=5x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{25x^2-\frac{15}{2}x^2}=x\sqrt{\frac{35}{2}}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{35}{2}x^2\cdot x\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{35\pi\sqrt{15}x^3}{6\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника BSH по теореме Пифагора получаем $49x^2=\frac{147x^2}{10}+49$, откуда $x=\sqrt{\frac{10}{7}}$. Значит, $V=\frac{125\pi}{\sqrt{21}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2-a,\\ x^2+y^2+8b^2=4b(y-x)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+2b)^2+(y-2b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-2b;2b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2-a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_в \le y_0$, т.е. $-a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$, $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1=4$, $CK_2=8$, и $BC=18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=12$, б) $\angle ABC=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_2 и BO_1 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_1K_1B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{4R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{8R}{r}$, откуда $\frac{12R}{r}=18$, $CK=12$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OBC=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ABC=2\cdot30^\circ=60^\circ$.

1. Решите уравнение $x^{\log_2\left(0,25x^3\right)} = 512x^4$.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$, $x = 8$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем $\log_2 x \cdot \log_2\left(\frac{1}{4}x^3\right) = \log_2 x^4 + \log_2 512$, что равносильно следующему: $3\log_2^2 x - 2\log_2 x = 4\log_2 x + 9 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$, откуда $\log_2 x = -1$ или $\log_2 x = 3$; $x = \frac{1}{2}$ или $x = 8$.

2. Решите уравнение $\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 x + \sin x \sin 5x$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin^2 x + \sin x \sin 5x = \sin x(\sin x + \sin 5x) = \sin x \cdot 2\cos 2x \sin 3x = \cos 2x \cdot (2\sin x \sin 3x) = \cos 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) =$$
$$= \cos 2x\left(-2\cos^2 2x + \cos 2x + 1\right) = \cos 2x(2\cos 2x + 1)(1 - \cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда уравнение принимает вид $\frac{1}{4} \cdot |2t + 1| = t(2t + 1)(1 - t)$. Возможны три случая.

а) $t = -\frac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t > -\frac{1}{2}$. Получаем $\frac{1}{4} = -t^2 + t$, $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$, $t = \frac{1}{2}$.

в) $t < -\frac{1}{2}$. Получаем $-\frac{1}{4} = -t^2 + t$, $t^2 - t - \frac{1}{4} = 0$, $t = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t < -\frac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

Итого: $t = \pm\frac{1}{2}$, $\cos 2x = \pm\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

Ответ. 4400.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-2) \vdots (3 \cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p - 2) \vdots (3 \cdot 101) \Leftrightarrow p(101p - 2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q + 1, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 101$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k-2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 2, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p + 2)101p \vdots (3 \cdot 101) \Leftrightarrow (101p + 2)p \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q + 2, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q + 204$, $k = 303q + 2$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 204, 2$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $333300 = 303 \cdot 1100$, получаем $4 \cdot 1100 = 4400$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} 2x + y + 8 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-3; -2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 9 - 6x^2 - 6y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 3\right)^2 = (2x + 2y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 3 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в точках $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=-2x-8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(-2x-9)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+34x+82=0,\\ y=-2x-8.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+(-2x-7)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+30x+45=0,\\ y=-2x-8.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3,\\ y=-2\end{cases}.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-3;-2)$.

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK:KS=1:4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS:BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, б) $V=\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHK, BHK, CHK, DHK. У них сторона HK общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHK и DHK прямые, угол AHK острый, а угол CHK тупой, отсюда следует, что $CK>BK=DK>AK$.

Так как точка K равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BK=DK=SK$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $AK=x$, $SK=4x$. Тогда $BS=5x$, $BK=4x$. Из равнобедренного треугольника BKS находим, что $\cos\angle ASB=\frac{BS}{2BK}=\frac{5}{8}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{5x\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\frac{DS}{BC}=\frac{AS}{AB}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки K до плоскости BSD. Так как $KS:AS=4:5$, то это расстояние равно $\frac{4}{5}$ расстояния от точки A до плоскости BSD, т.е $\frac{4}{5}AH=\frac{2\sqrt{2}}{5}AB=x\sqrt{6}$. Образующая конуса – это отрезок $KS=4x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{16x^2-6x^2}=x\sqrt{10}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot 10x^2\cdot x\sqrt{6}=\frac{10\pi\sqrt{2}x^3}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного треугольника ASH по теореме Пифагора получаем $25x^2=\frac{75x^2}{8}+25$, откуда $x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Значит, $V=\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases}y=b-x^2,\\ x^2+y^2+2a^2=4-2a(x+y)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\ge -2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+a)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-a;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\le y\le x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y = x - 2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $b - x^2 = x - 2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0 = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_в \geq y_0$, т.е. $b \geq -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

7. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$, и $BC = 16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK = \frac{24}{5}$, б) $\angle ACB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые CO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK = \frac{7R}{r}$. Аналогично $CK = \frac{3R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r} = 16$, $CK = \frac{24}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O = O_1K_1 = r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH = R - r = \frac{3}{5}r$, $\angle OCB = \angle OO_1H = \arcsin\frac{OH}{OO_1} = \arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle ACB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

1. Решите уравнение $x^{\log_5(0,008x)} = \dfrac{125}{x^5}$.

Ответ. $x = 5$, $x = \dfrac{1}{125}$.

Решение. Логарифмируя по основанию 5, получаем $\log_5 x \cdot \log_5\left(\dfrac{x}{125}\right) = \log_5 125 - \log_5 x^3$, что равносильно следующему: $\log_5^2 x - 3\log_5 x = 3 - 5\log_5 x \Leftrightarrow \log_5^2 x + 2\log_5 x - 3 = 0$, откуда $\log_5 x = 1$ или $\log_5 x = -3$; $x = 5$ или $x = \dfrac{1}{125}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\left|\cos 2x - \dfrac{1}{2}\right| = \cos^2 x + \cos x \cos 5x$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos^2 x + \cos x\cos 5x = \cos x(\cos x + \cos 5x) = \cos x \cdot 2\cos 2x\cos 3x = \cos 2x \cdot (2\cos x\cos 3x) = \cos 2x \cdot (\cos 2x + \cos 4x) =$$
$$= \cos 2x\left(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) = \cos 2x(\cos 2x + 1)(2\cos 2x - 1).$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда уравнение принимает вид $\dfrac{1}{4}\cdot|2t - 1| = t(t+1)(2t-1)$. Возможны три случая.

а) $t = \dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t > \dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t - \dfrac{1}{4} = 0$, $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t > \dfrac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

в) $t < \dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t + \dfrac{1}{4} = 0$, $t = -\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t = \pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x = \pm\dfrac{1}{2}$, $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.
Ответ. 3600.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-1) \vdots (5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p - 1) \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p - 1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q + 1, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q$, $k = 505q + 101$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k-1) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 1, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+1)101p \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+1)p \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q + 4, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q + 405$, $k = 505q + 1$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 405, 1$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $454500 = 505 \cdot 900$, получаем $4 \cdot 900 = 3600$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x + 3y + 14 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-2; -4)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 64 - 16x^2 - 16y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 8\right)^2 = (2x + 2y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 8 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $x=-3y-14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3y-15)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+88x+216=0,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3y-13)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+80y+160=0,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-4,\\ x=-2.\end{cases}$.

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-2;-4)$.

5. На ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $CL:LS=1:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS:AB$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 6. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, б) $V=\frac{125\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHL, BHL, CHL, DHL. У них сторона HL общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHL и DHL прямые, угол CHL острый, а угол AHL тупой, отсюда следует, что $AL>BL=DL>CL$.

Так как точка L равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BL=DL=SL$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник CBS. Пусть $CL=x$, $SL=5x$. Тогда $BL=5x$, $BS=6x$. Из равнобедренного треугольника BLS находим, что $\cos\angle LSB=\frac{BS}{2SL}=\frac{3}{5}$. Далее по теореме косинусов для треугольника CBS получаем, что $BC=\frac{12x}{\sqrt{5}}$. Значит, $\frac{AS}{AB}=\frac{BS}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки L до плоскости BSD. Так как $LS:CS=5:6$, то это расстояние равно $\frac{5}{6}$ расстояния от точки C до плоскости BSD, т.е $\frac{5}{6}CH=\frac{5}{6\sqrt{2}}BC=x\sqrt{10}$. Образующая конуса – это отрезок $LS=5x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{25x^2-10x^2}=x\sqrt{15}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot 15x^2\cdot x\sqrt{10}=5\pi\sqrt{10}x^3$.

Из прямоугольного треугольника CSH по теореме Пифагора получаем $36x^2=\frac{72x^2}{5}+36$, откуда $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Значит, $V=\frac{125\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2+a,\\ x^2+y^2+2b^2=2b(x-y)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(b;-b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2+a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_{\text{в}}\le y_0$, т.е. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

7. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=6$, $AK_2=8$, и $AC=21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=9$, б) $\angle ACB=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_1 и AO_2 являются биссектрисами углов C и A треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKA и O_2K_2A подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $AK=\frac{8R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{6R}{r}$, откуда $\frac{14R}{r}=21$, $CK=9$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ACB=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.