

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 11

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin x = 2 \cos y - \frac{5}{2} \sin y$, $\cos x = 2 \sin y - \frac{5}{2} \cos y$. Найдите $\sin 2y$.
2. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся такое число a , что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 20-угольник M . Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.
6. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.
- а) Найдите длину отрезка AK .
- б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3 . Найдите угол $СAB$, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 12

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin y = \frac{3}{2} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$, $\cos y = \frac{2}{3} \sin x + \frac{3}{2} \cos x$. Найдите $\sin 2x$.
2. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x \geq 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся такое число b , что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 16-угольник M . Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами трапеций.
6. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $BK_1 = 4$, $CK_2 = 8$, и $BC = 18$.
- а) Найдите длину отрезка CK .
- б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3 . Найдите угол ABC , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 13

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin y = 2 \cos x + \frac{5}{2} \sin x$, $\cos y = 2 \sin x + \frac{5}{2} \cos x$. Найдите $\sin 2x$.
2. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + y + 8 \leq 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся такое число a , что система

$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 22-угольник M . Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами трапеций.
6. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$, и $BC = 16$.
- а) Найдите длину отрезка CK .
- б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3 . Найдите угол ACB , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 14

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin x = \frac{3}{2} \sin y - \frac{2}{3} \cos y$, $\cos x = \frac{3}{2} \cos y - \frac{2}{3} \sin y$. Найдите $\sin 2y$.
2. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.

3. Решите систему

$$\begin{cases} x + 3y + 14 \leq 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся такое число b , что система

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 + 2b^2 = 2b(x - y) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 18-угольник M . Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами трапеций.
6. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 6$, $AK_2 = 8$, и $AC = 21$.
- а) Найдите длину отрезка CK .
- б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3 . Найдите угол BKA , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .