1. Известно, что $\sin x = 2\cos y - \frac{5}{2}\sin y$, $\cos x = 2\sin y - \frac{5}{2}\cos y$. Найдите $\sin 2y$.

Ответ. $\sin 2y = \frac{37}{40}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = 4 - 20\sin y\cos y + \frac{25}{4}$, откуда

$10\sin 2y = \frac{37}{4}$, $\sin 2y = \frac{37}{40}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.
Ответ. 3200.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+2) \vdots (3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p+2) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p+2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q+2, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 202$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k+2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 99, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+99)(101p+101) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+99)(p+1) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q+2, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q + 99$, $k = 303q + 301$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 202, 99, 301$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $242400 = 303\cdot 800$, получаем $4\cdot 800 = 3200$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} 3x \ge 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$

Ответ. $(6;1)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $36x^2 + 36y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + 25 + 10x^2 + 10y^2 = 36x^2 + 36y^2 + 72xy \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+5\right)^2 = (6x+6y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+5 = 6x+6y, \\ x^2+y^2+5 = -6x-6y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)^2+(y-3)^2 = 13, \\ (x+3)^2+(y+3)^2 = 13. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центрами в точках $(3;3)$ и $(-3;-3)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = \frac{3x}{2} - 8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $$\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+\left(\frac{3x}{2}-11\right)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{4}x^2 - 39x + 117 = 0, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 1. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2+\left(\frac{3x}{2}-5\right)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{4}x^2 - 9x + 21 = 0, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(-3;-3)$ и $(3;3)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(6;1)$.

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x+y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b \le 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(2a; 2a)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x - 2\sqrt{2} \le y \le x + 2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y = x - 2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $-b - x^2 = x - 2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0 = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_{\text{в}} \ge y_0$, т.е. $-b \ge -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$, $b \le 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 720.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{20}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1, ..., K_{20}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2 = 45$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{10}K_{11}$ – всего 10 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2 = 36$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 10.

В итоге получаем $10 \cdot 45 + 10 \cdot 36 = 810$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 10, и таким образом, выходит $C_{10}^2 = 45$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $810 - 90 = 720$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $AK = \frac{32}{5}$, б) $\angle CAB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые AO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов A и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK = \frac{6R}{r}$. Аналогично $AK = \frac{4R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r} = 16$, $AK = \frac{32}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O = O_1K_1 = r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH = R - r = \frac{3}{5}r$, $\angle OAB = \angle OO_1H = \arcsin\frac{OH}{OO_1} = \arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle CAB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

1. Известно, что $\sin y = \frac{3}{2}\sin x + \frac{2}{3}\cos x$, $\cos y = \frac{2}{3}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

Ответ. $\sin 2x = -\frac{61}{72}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = \frac{9}{4} + 4\sin x\cos x + \frac{4}{9}$, откуда $-2\sin 2x = \frac{61}{36}$, $\sin 2x = -\frac{61}{72}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

Ответ. 2800.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+1) \vdots (5 \cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p+1) \vdots (5 \cdot 101) \Leftrightarrow p(101p+1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q + 4, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q$, $k = 505q + 404$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k+1) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 100, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+100)(101p+101) \vdots (5 \cdot 101) \Leftrightarrow (101p+100)(p+1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q + 4, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q + 100$, $k = 505q + 504$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 404, 100, 504$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $353500 = 505 \cdot 700$, получаем $4 \cdot 700 = 2800$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} 2x \ge 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$

Ответ. $(8; 2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $64x^2 + 64y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 144 + 24x^2 + 24y^2 = 64x^2 + 64y^2 + 128xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + 12\right)^2 = (8x + 8y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 12 = 8x + 8y, \\ x^2 + y^2 + 12 = -8x - 8y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 20, \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 20. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центрами в точках $(4; 4)$ и $(-4; -4)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = 2x - 14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 20, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (2x-18)^2 = 20, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 80x + 320 = 0, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+4)^2 + (y+4)^2 = 20, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (2x-10)^2 = 20, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 32x + 96 = 0, \\ y = 2x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(4; 4)$ и $(-4; -4)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(8; 2)$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \ge -\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+2b)^2+(y-2b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-2b;2b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2-a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_{\text{в}}\le y_0$, т.е. $-a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$, $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 336.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{16}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{16}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_8K_9 – всего 8 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 6 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 7 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_7^2=21$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 8.

В итоге получаем $8\cdot 28+8\cdot 21=392$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_8^2=28$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $392-56=336$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1=4$, $CK_2=8$, и $BC=18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=12$, б) $\angle ABC=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_2 и BO_1 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_1K_1B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{4R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{8R}{r}$, откуда $\frac{12R}{r}=18$, $CK=12$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OBC=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ABC=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

1. Известно, что $\sin y = 2\cos x + \frac{5}{2}\sin x$, $\cos y = 2\sin x + \frac{5}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

Ответ. $\sin 2x = -\frac{37}{40}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = 4 + 20\sin x\cos x + \frac{25}{4}$, откуда $-10\sin 2x = \frac{37}{4}$, $\sin 2x = -\frac{37}{40}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

Ответ. 4400.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-2) \vdots (3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p-2) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p-2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q+1, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 101$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k-2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 2, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+2)101p \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+2)p \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q+2, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q + 204$, $k = 303q + 2$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 204, 2$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $333300 = 303\cdot 1100$, получаем $4\cdot 1100 = 4400$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} 2x + y + 8 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-3; -2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 9 - 6x^2 - 6y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 3\right)^2 = (2x + 2y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 3 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = -2x - 8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (-2x-9)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 34x + 82 = 0, \\ y = -2x - 8. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$.

б) $\begin{cases} (x+1`)^2 + (y+1)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (-2x-7)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 30x + 45 = 0, \\ y = -2x - 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = -2 \end{cases}$.

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-3;-2)$.

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \ge -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+a)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-a;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\le y\le x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y=x-2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $b-x^2=x-2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_в\ge y_0$, т.е. $b\ge-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 22-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 990.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{22}$ в окружность. Каждая трапеция сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{22}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 10 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 11 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{11}^2=55$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{11}K_{12}$ – всего 11 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 11.

В итоге получаем $11\cdot55+11\cdot45=1100$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 11, и таким образом, выходит $C_{11}^2=55$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $1100-110=990$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=3$, $BK_2=7$, и $BC=16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=\frac{24}{5}$, б) $\angle ACB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые CO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{7R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{3R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r}=16$, $CK=\frac{24}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{3}{5}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle ACB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

1. Известно, что $\sin x = \frac{3}{2}\sin y - \frac{2}{3}\cos y$, $\cos x = \frac{3}{2}\cos y - \frac{2}{3}\sin y$. Найдите $\sin 2y$.

Ответ. $\sin 2y = \frac{61}{72}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = \frac{9}{4} - 4\sin y\cos y + \frac{4}{9}$, откуда

$2\sin 2y = \frac{61}{36}$, $\sin 2y = \frac{61}{72}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.
Ответ. 3600.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-1) \vdots (5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in Z$. Тогда получаем $101p(101p-1) \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p-1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in Z$, а второй – при $p = 5q+1, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 505q$, $k = 505q + 101$, $q \in Z$.

б) $(k-1) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 1, p \in Z$. Тогда получаем $(101p+1)101p \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+1)p \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q+4, q \in Z$, а второй – при $p = 5q, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 505q + 405$, $k = 505q + 1$, $q \in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 405, 1$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $454500 = 505\cdot 900$, получаем $4\cdot 900 = 3600$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} x + 3y + 14 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-2; -4)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 64 - 16x^2 - 16y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 8\right)^2 = (2x + 2y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 8 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $x = -3y - 14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3y-15)^2 + (y-1)^2 = 10, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 88x + 216 = 0, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3y-13)^2 + (y+1)^2 = 10, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 80y + 160 = 0, \\ x = -3y - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4, \\ x = -2. \end{cases}$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-2;-4)$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 + 2b^2 = 2b(x - y) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \le \sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(b;-b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2+a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_{\text{в}}\le y_0$, т.е. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 504.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{18}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{18}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_9K_{10} – всего 9 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 9.

В итоге получаем $9\cdot 36+9\cdot 28=576$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_9^2=36$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $576-72=504$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=6$, $AK_2=8$, и $AC=21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=9$, б) $\angle ACB=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_1 и AO_2 являются биссектрисами углов C и A треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKA и O_2K_2A подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $AK=\frac{8R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{6R}{r}$, откуда $\frac{14R}{r}=21$, $CK=9$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ACB=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.