

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**10 класс**

БИЛЕТ 1

ШИФР \_\_\_\_\_

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Дан правильный 20-угольник  $M$ . Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.
3. Найдите количество натуральных чисел  $k$ , не превосходящих 291000 и таких, что  $k^2 - 1$  делится нацело на 291.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y)$ .

6. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равных радиусов с центрами  $O_1$  и  $O_2$  вписаны в углы  $BAD$  и  $BCD$  соответственно, при этом первая касается стороны  $AD$  в точке  $K$ , а вторая касается стороны  $BC$  в точке  $T$ .
- а) Найдите радиус окружности  $\Omega_1$ , если  $AK = 2$ ,  $CT = 8$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что точка  $O_2$  является центром окружности, описанной около треугольника  $BOC$ . Найдите угол  $BDC$ .

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**10 класс**

БИЛЕТ 2

ШИФР \_\_\_\_\_

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}.$$

2. Дан правильный 16-угольник  $M$ . Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел  $k$ , не превосходящих 445000 и таких, что  $k^2 - 1$  делится нацело на 445.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся число  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \frac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y)$ .

6. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равных радиусов с центрами  $O_1$  и  $O_2$  вписаны в углы  $ABC$  и  $ADC$  соответственно, при этом первая касается стороны  $BC$  в точке  $K$ , а вторая касается стороны  $AD$  в точке  $T$ .

а) Найдите радиус окружности  $\Omega_1$ , если  $BK = 3\sqrt{3}$ ,  $DT = \sqrt{3}$ .

б) Пусть дополнительно известно, что точка  $O_1$  является центром окружности, описанной около треугольника  $BOC$ . Найдите угол  $BDC$ .

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**10 класс**

БИЛЕТ 3

ШИФР \_\_\_\_\_

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

2. Дан правильный 22-угольник  $M$ . Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел  $k$ , не превосходящих 485000 таких, что  $k^2 - 1$  делится нацело на 485.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых найдётся число  $a$  такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{7}{b} - |y + b|, \\ x^2 + y^2 + 96 = -a(2y + a) - 20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y)$ .

6. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равных радиусов с центрами  $O_1$  и  $O_2$  вписаны в углы  $BAD$  и  $BCD$  соответственно, при этом первая касается стороны  $AB$  в точке  $L$ , а вторая касается стороны  $BC$  в точке  $F$ .

а) Найдите радиус окружности  $\Omega_2$ , если  $AL = \sqrt{2}$ ,  $CF = 2\sqrt{2}$ .

б) Пусть дополнительно известно, что точка  $O_2$  является центром окружности, описанной около треугольника  $BOC$ . Найдите угол  $BDC$ .

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**10 класс**

БИЛЕТ 4

ШИФР \_\_\_\_\_

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Дан правильный 18-угольник  $M$ . Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел  $k$ , не превосходящих 267000 и таких, что  $k^2 - 1$  делится нацело на 267.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся число  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{6}{a} - |y - a|, \\ x^2 + y^2 + b^2 + 63 = 2(by - 8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y)$ .

6. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Две окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равных радиусов с центрами  $O_1$  и  $O_2$  вписаны в углы  $ABC$  и  $ADC$  соответственно, при этом первая касается стороны  $BC$  в точке  $F$ , а вторая касается стороны  $AD$  в точке  $P$ .

а) Найдите радиус окружности  $\Omega_2$ , если  $BF = 3\sqrt{2}$ ,  $DP = \sqrt{2}$ .

б) Пусть дополнительно известно, что точка  $O_1$  является центром окружности, описанной около треугольника  $BOC$ . Найдите угол  $BDC$ .