1. Решите уравнение $\log_{2^{x+1}+1}\left(3x^2+4x-3\right)=\log_{10-2^{2-x}}\left(3x^2+4x-3\right)$.

Ответ. $x=2,\ x=\frac{2}{3}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}2^{x+1}+1=10-2^{2-x},\\ 3x^2+4x-3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^x+4=0,\\ 3x^2+4x-4=0.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $2^x=\frac{1}{2}$ или $2^x=4$, откуда $x=-1$ или $x=2$. Из второго уравнения $x=-2$ или $x=\frac{2}{3}$. ОДЗ удовлетворяют только значения $x=2$ и $x=\frac{2}{3}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{7\cos^2 x+5\sin^2 x-6}+\dfrac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{6-5\cos^2 x-7\sin^2 x}=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}+\frac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\cos 2x},$$

$$\cos x\cdot\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\sin x\cos x,$$

откуда $\cos x=0$ или $\operatorname{tg}x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$. Условию $\cos 2x\neq 0$ удовлетворяют только значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-4xy+4y^2=2x-4y+3,\\ \sqrt{3x-6y}=2-xy.\end{cases}$

Ответ. $(1;-1)$, $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Первое уравнение можно переписать в виде $(x-2y)^2-2(x-2y)-3=0$, откуда следует, что $x-2y=3$ или $x-2y=-1$. Если $x-2y=-1$, то подкоренное выражение во втором уравнении отрицательно и система не имеет решений. Если $x-2y=3$, то второе уравнение принимает вид $3=2-y(2y+3)$, откуда $y=-1$ или $y=-\frac{1}{2}$.

В итоге получаем два решения – пары чисел $(1;-1)$ и $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали AC, касается отрезков BC, AB и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $AC=4\sqrt{5}$, а четырёхугольник $KOCD$ вписан в окружность Ω. Найдите угол BOC, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ. $\angle BOC=90^\circ$, $S=30$, $r=\sqrt{10}$.

Решение. Окружность вписана в углы A и B трапеции, следовательно, её центр лежит на пересечении биссектрис этих углов. Поскольку угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых равен 90°, получаем $\angle BOC=\angle AOB=90^\circ$.

Треугольник ABC равнобедренный, так как BO является его высотой и биссектрисой. Значит, BO также является медианой, поэтому $AO = CO = 2\sqrt{5}$. Пусть $\angle CAD = \angle BAC = \angle BCA = \gamma$. Из прямоугольного треугольника MOC находим, что $MC = 4$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Поскольку вокруг четырёхугольника $KOCD$ можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle OCD = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACD находим, что $AD = \frac{AC}{\cos\gamma} = 10$, $CD = AC \cdot \operatorname{tg}\gamma = 2\sqrt{5}$. Из треугольника BOC получаем, что $BC = \frac{CO}{\cos\gamma} = 5$. Находим площадь трапеции: $S = \frac{1}{2} MK \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15 = 30$.

Отрезок OD является диаметром окружности Ω. Из треугольника COD получаем: $OD^2 = CO^2 + CD^2 = 20 + 20 = 40$; $OD = 2\sqrt{10}$. Следовательно, радиус r окружности Ω равен $\sqrt{10}$.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}$?

Ответ. 126.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 2^\gamma$, $y = 3^\lambda \cdot 5^\mu \cdot 2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{3\alpha+2\lambda} \cdot 5^{3\beta+2\mu} \cdot 2^{3\gamma+2\nu} = 3^{15} \cdot 5^{35} \cdot 2^{40}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\lambda = 15, \\ 3\beta + 2\mu = 35, \\ 3\gamma + 2\nu = 40. \end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\alpha \in \{1; 3; 5\}$, $\beta \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, $\gamma \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$. Получаем три варианта для первого уравнения, шесть вариантов для второго и семь для третьего. В итоге $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$ решений.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 4 \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} + \frac{\sqrt{16+6x-x^2}}{2x-1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in \left(-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{2\pi}{3}; 3; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Первое неравенство равносильно следующему:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 4 \le 2, \ \left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)^2 \le 0, \ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

Рассмотрим неравенство $\frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} + \frac{\sqrt{16+6x-x^2}}{2x-1} \le 2$.

В его левой части записана сумма двух взаимно обратных чисел. Она не превосходит двух в одном из двух случаев:

а) каждое из чисел отрицательно, т.е. $\frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} < 0$, откуда $x \in \left(-2; \frac{1}{2}\right)$;

б) каждое из чисел равно единице, т.е. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}}=1$, откуда $4x^2-4x+1=16+6x-x^2$,

$x^2-2x-3=0$, $x=3$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in(-2;8)\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Объединяя решения и учитывая ОДЗ, получаем, что $x\in\left(-2;-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left\{\dfrac{2\pi}{3};3;\dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

7. Даны пирамида $ABCD$ и сфера радиуса 3. Ребро AB пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ACB, длину ребра CD и объём пирамиды $ABCD$.

Ответ. $\angle ACB=45^\circ$, $CD=12$, $V=18\sqrt{3}$.

Решение. Предположим, что сфера касается прямых AC и AD. Тогда AB перпендикулярно плоскости ACD, поэтому сфера имеет единственную общую точку A с плоскостью ACD, и значит, не имеет общих точек с ребром CD. С прямыми BA, BC, BD сфера будет иметь по две точки пересечения, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что сфера не может касаться одновременно рёбер BC и BD.

Значит, сфера касается ровно одной из двух прямых AC или AD – пусть, для определённости, ребра AD. Тогда сфера также касается прямых BC и CD и проходит через середины K и L рёбер AC и BD соответственно.

Из касания сферы с прямой BC следует, что $BC\perp AB$. Так как OK – средняя линия треугольника ABC, то $BC=2\cdot OK=2R=AB$, откуда вытекает, что ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник и $\angle ACB=45^\circ$. Аналогично доказывается, что BAD – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой BD.

Пусть M – точка касания сферы с ребром CD. Треугольник CDO – равнобедренный (т.к. отрезки CO и DO – это соответствующие медианы равных треугольников BAC и BAD), OM – его высота, а значит, и медиана. Из равенства треугольников COB и COM получаем, что $CM=CB=2R$, следовательно, $CD=4R=12$.

Опустим из вершины D высоту DH на плоскость ABC. Тогда точка H лежит на прямой, проходящей через точку A параллельно CB. Пусть $DH=h$, $AH=x$. По теореме Пифагора из треугольников ADH и CDH получаем

$$x^2+h^2=4R^2,\ (x+2R)^2+(2R)^2+h^2=(4R)^2.$$

Решая эти уравнения, находим, что $x=R$, $h=R\sqrt{3}$.

Тогда объём V пирамиды $ABCD$ равен $\dfrac{1}{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot 2R^2=\dfrac{2R^3}{\sqrt{3}}=18\sqrt{3}$.

1. Решите уравнение $\log_{x^2-2x}\left(2-3^{4x-x^2}\right)=\log_{6-x}\left(2-3^{4x-x^2}\right)$..

Ответ. $x=4,\ x=-2$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=6-x, \\ 2-3^{4x-x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0, \\ 4x-x^2=0. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $x=3$ или $x=-2$; из второго уравнения $x=4$ или $x=0$. ОДЗ удовлетворяют только значения $x=4$ и $x=-2$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{6\cos^2 x+4\sin^2 x-5}+\dfrac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{5-4\cos^2 x-6\sin^2 x}=\dfrac{-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x}{2}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos 2x}+\frac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x}=\frac{-\sqrt{3}\sin 2x}{2\cos 2x},$$

$$\cos x\cdot\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\sqrt{3}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=-\sqrt{3}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\sqrt{3}\cos x=-\sqrt{3}\sin x\cos x$$

откуда $\cos x=0$ или $\mathrm{tg}\,x=-1$, т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. Условию $\cos 2x\neq 0$ удовлетворяют только значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+4y^2+4xy=2x+4y+3, \\ \sqrt{3x+6y}+xy=4. \end{cases}$

Ответ. $(1;1)$, $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Первое уравнение можно переписать в виде $(x+2y)^2-2(x+2y)-3=0$, откуда следует, что $x+2y=3$ или $x+2y=-1$. Если $x+2y=-1$, то подкоренное выражение во втором уравнении отрицательно и система не имеет решений. Если $x+2y=3$, то второе уравнение принимает вид $3+y(3-2y)=4$, откуда $y=1$ или $y=\dfrac{1}{2}$.

В итоге получаем два решения – пары чисел $(1;1)$ и $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BM=3$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COD, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ. $\angle COD=90^\circ$, $S=26$, $r=\dfrac{5\sqrt{13}}{6}$.

Решение. Окружность вписана в углы C и D трапеции, следовательно, её центр лежит на пересечении биссектрис этих углов. Поскольку угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых равен 90°, получаем $\angle DOC=\angle COB=90^\circ$.

Из прямоугольного треугольника BMO находим, что $OB=\sqrt{BM^2+OM^2}=\sqrt{13}$. Треугольник DBC равнобедренный, так как CO является его высотой и биссектрисой. Значит, CO также является медианой, поэтому $DO=BO=\sqrt{13}$. Пусть $\angle CBD=\angle BDA=\angle BDC=\gamma$. Из треугольника MOB находим, что $\operatorname{tg}\gamma=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\gamma=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Поскольку вокруг четырёхугольника $KOBA$ можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle OBA=90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что $AD=\frac{BD}{\cos\gamma}=\frac{26}{3}$, $AB=AD\cdot\sin\gamma=\frac{4\sqrt{13}}{3}$. Из треугольника BOC получаем, что $BC=\frac{BO}{\cos\gamma}=\frac{13}{3}$.

Находим площадь трапеции: $S=\frac{1}{2}MK\cdot(BC+AD)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 13=26$.

Отрезок OA является диаметром окружности Ω. Из треугольника AOB получаем: $OA^2=BO^2+AB^2=\frac{208}{9}+13=\frac{325}{9}$; $OD=\frac{5\sqrt{13}}{3}$. Следовательно, радиус r окружности Ω равен $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5y^3=18^{50}\cdot 10^{33}$?

Ответ. 126.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x=3^\alpha\cdot 5^\beta\cdot 2^\gamma$, $y=3^\lambda\cdot 5^\mu\cdot 2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{5\alpha+3\lambda}\cdot 5^{5\beta+3\mu}\cdot 2^{5\gamma+3\nu}=3^{100}\cdot 5^{33}\cdot 2^{83}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}5\alpha+3\lambda=100,\\ 5\beta+3\mu=33,\\ 5\gamma+3\nu=83.\end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\alpha\in\{2;5;8;11;14;17;20\}$, $\beta\in\{0;3;6\}$, $\gamma\in\{1;4;7;10;13;16\}$. Получаем семь вариантов для первого уравнения, три варианта для второго и шесть для третьего. В итоге $7\cdot 3\cdot 6=126$ решений.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\operatorname{ctg}x \quad\text{и}\quad g(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{9+8x-x^2}}+\frac{\sqrt{9+8x-x^2}}{2x-3}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)\cup\left\{4;\frac{4\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}f(x)\le 2,\\ g(x)\le 2.\end{array}\right.$$

Первое неравенство равносильно следующему:

$$3+3\operatorname{ctg}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{ctg}x\le 2,\ \left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}x-1\right)^2\le 0,\ \operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathrm{Z}.$$

Рассмотрим неравенство $\frac{2x-3}{\sqrt{9+8x-x^2}}+\frac{\sqrt{9+8x-x^2}}{2x-3}\le 2$.

В его левой части записана сумма двух взаимно обратных чисел. Она не превосходит двух в одном из двух случаев:

а) каждое из чисел отрицательно, т.е. $\frac{2x-3}{\sqrt{9+8x-x^2}}<0$, откуда $x\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$;

б) каждое из чисел равно единице, т.е. $\frac{2x-3}{\sqrt{9+8x-x^2}}=1$, откуда $4x^2-12x+9=9+8x-x^2$, $5x^2-20x=0$, $x=4$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\neq\pi m, m\in\mathrm{Z}$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in(-1;9)\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, получаем, что $x\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{3}{2}\right)\cup\left\{4;\frac{4\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right\}$.

7. Даны пирамида $ABCD$ и сфера радиуса $\sqrt{3}$. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC, длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$.

Ответ. $\angle ABC=45^\circ$, $BD=4\sqrt{3}$, $V=6$.

Решение. Предположим, что сфера касается прямых AB и AD. Тогда AC перпендикулярно плоскости ABD, поэтому сфера имеет единственную общую точку A с плоскостью ABD, и значит, не имеет общих точек с ребром BD. С прямыми CA, CB, CD сфера будет иметь по две точки пересечения, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что сфера не может касаться одновременно рёбер BC и CD.

Значит, сфера касается ровно одной из двух прямых AB или AD – пусть, для определённости, ребра AD. Тогда сфера также касается прямых BC и BD и проходит через середины K и L рёбер AB и CD соответственно.

Из касания сферы с прямой BC следует, что $BC\perp AC$. Так как OK – средняя линия треугольника ABC, то $BC=2\cdot OK=2R=AC$, откуда вытекает, что ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник и $\angle ACB=45^\circ$. Аналогично доказывается, что ACD – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой CD.

Пусть M – точка касания сферы с ребром BD. Треугольник BDO – равнобедренный (т.к. отрезки BO и DO – это соответствующие медианы равных треугольников BAC и DAC), OM – его высота, а значит, и медиана. Из равенства треугольников COB и MOB получаем, что $CM=CB=2R$, следовательно, $CD=4R=4\sqrt{3}$.

Опустим из вершины D высоту DH на плоскость ABC. Тогда точка H лежит на прямой, проходящей через точку A параллельно CB. Пусть $DH=h$, $AH=x$. По теореме Пифагора из треугольников ADH и BDH получаем

$$x^2+h^2=4R^2,\ (x+2R)^2+(2R)^2+h^2=(4R)^2.$$

Решая эти уравнения, находим, что $x=R$, $h=R\sqrt{3}$.

Тогда объём V пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot 2R^2=\frac{2R^3}{\sqrt{3}}=6$.

1. Решите уравнение $\log_{6-2^{2-x}}\left(3x^2-2x-4\right)=\log_{1,5+2^{x-1}}\left(3x^2-2x-4\right)$.

Ответ. $x=3,\ x=\frac{5}{3}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}6-2^{2-x}=1{,}5+2^{x-1},\\ 3x^2-2x-4=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0,\\ 3x^2-2x-5=0.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $2^x=1$ или $2^x=8$, откуда $x=0$ или $x=3$. Из второго уравнения $x=-1$ или $x=\frac{5}{3}$. ОДЗ удовлетворяют только значения $x=3$ и $x=\frac{5}{3}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\cos x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{9\cos^2 x+7\sin^2 x-8}-\dfrac{\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{8-7\cos^2 x-9\sin^2 x}=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}$.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}+\frac{\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}\cos 2x},$$

$$\cos x\cdot\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}\sin x\cos x,$$

откуда $\cos x=0$ или $\operatorname{tg}x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$. Условию $\cos 2x\neq 0$ удовлетворяют только значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}4x^2+y^2-4xy=4x-2y+3,\\ \sqrt{6x-3y}=2-xy.\end{cases}$

Ответ. $(1;-1)$, $\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

Решение. Первое уравнение можно переписать в виде $(2x-y)^2-2(2x-y)-3=0$, откуда следует, что $2x-y=3$ или $2x-y=-1$. Если $2x-y=-1$, то подкоренное выражение во втором уравнении отрицательно и система не имеет решений. Если $2x-y=3$, то второе уравнение принимает вид $3=2-x(2x-3)$, откуда $x=1$ или $x=\frac{1}{2}$.

В итоге получаем два решения – пары чисел $(1;-1)$ и $\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса 2, центр O которой лежит на диагонали AC, касается отрезков BC, AB и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $AN=3$, а четырёхугольник $KOCD$ вписан в окружность Ω. Найдите угол AOB, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ. $\angle AOB=90^\circ$, $S=26$, $r=\frac{5}{6}\sqrt{13}$.

Решение. Окружность вписана в углы A и B трапеции, следовательно, её центр лежит на пересечении биссектрис этих углов. Поскольку угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых равен 90°, получаем $\angle AOB=90^\circ$.

По теореме Пифагора из треугольника AON находим, что $AO^2=\sqrt{AN^2+NO^2}=\sqrt{13}$. Треугольник ABC равнобедренный, так как BO является его высотой и биссектрисой. Значит, BO также является медианой, поэтому $CO=AO=\sqrt{13}$. Пусть $\angle CAD=\angle BAC=\angle BCA=\gamma$. Из треугольника AON находим, что $\operatorname{tg}\gamma=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\gamma=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Поскольку вокруг четырёхугольника $KOCD$ можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle OCD=90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ACD находим, что $AD=\frac{AC}{\cos\gamma}=\frac{26}{3}$, $CD=AC\cdot\operatorname{tg}\gamma=\frac{4\sqrt{13}}{3}$. Из треугольника BOC получаем, что $BC=\frac{CO}{\cos\gamma}=\frac{13}{3}$.

Находим площадь трапеции: $S=\frac{1}{2}MK\cdot\left(BC+AD\right)=\frac{1}{2}\cdot4\cdot13=26$.

Отрезок OD является диаметром окружности Ω. Из треугольника COD получаем: $OD^2=CO^2+CD^2=13+\frac{208}{9}=\frac{325}{9}$; $OD=\frac{5}{3}\sqrt{10}$. Следовательно, радиус r окружности Ω равен $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^7y^2=12^{55}\cdot15^{30}$?

Ответ. 144.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x=3^\alpha\cdot5^\beta\cdot2^\gamma$, $y=3^\lambda\cdot5^\mu\cdot2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{7\alpha+2\lambda}\cdot5^{7\beta+2\mu}\cdot2^{7\gamma+2\nu}=3^{85}\cdot5^{30}\cdot2^{110}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}7\alpha+2\lambda=85,\\7\beta+2\mu=30,\\7\gamma+2\nu=110.\end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\alpha\in\{1;3;5;7\ 9;11\}$, $\beta\in\{0;2;4\}$, $\gamma\in\{0;2;4;6;8;10;12;14\}$. Получаем шесть вариантов для первого уравнения, три варианта для второго и восемь для третьего. В итоге $6\cdot3\cdot8=144$ решений.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\frac{3}{\cos^2x}+2\sqrt{3}\operatorname{tg}x \quad\text{и}\quad g(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}+\frac{\sqrt{21+4x-x^2}}{2x+1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x\in\left(-3;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{2;\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}f(x)\le2,\\g(x)\le2.\end{array}\right.$$

Первое неравенство равносильно следующему:

$$3+3\operatorname{tg}^2x+2\sqrt{3}\operatorname{tg}x\le2,\ \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1\right)^2\le0,\ \operatorname{tg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathrm{Z}.$$

Рассмотрим неравенство $\frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}+\frac{\sqrt{21+4x-x^2}}{2x+1}\le2$.

В его левой части записана сумма двух взаимно обратных чисел. Она не превосходит двух в одном из двух случаев:

а) каждое из чисел отрицательно, т.е. $\frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}<0$, откуда $x\in\left(-3;-\frac{1}{2}\right)$;

б) каждое из чисел равно единице, т.е. $\frac{2x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}=1$, откуда $4x^2+4x+1=21+4x-x^2$,

$5x^2=20$, $x=2$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in(-3;7)\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Объединяя решения и учитывая ОДЗ, получаем, что $x\in\left(-3;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{2;\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$.

7. Даны пирамида $ABCD$ и сфера. Ребро AB пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ACB, длину ребра CD и объём пирамиды $ABCD$, если $AB=2\sqrt{3}$.

Ответ. $\angle ACB=45^\circ$, $CD=4\sqrt{3}$, $V=6$.

Решение. Предположим, что сфера касается прямых AC и AD. Тогда AB перпендикулярно плоскости ACD, поэтому сфера имеет единственную общую точку A с плоскостью ACD, и значит, не имеет общих точек с ребром CD. С прямыми BA, BC, BD сфера будет иметь по две точки пересечения, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что сфера не может касаться одновременно рёбер BC и BD.

Значит, сфера касается ровно одной из двух прямых AC или AD – пусть, для определённости, ребра AD. Тогда сфера также касается прямых BC и CD и проходит через середины K и L рёбер AC и BD соответственно.

Из касания сферы с прямой BC следует, что $BC\perp AB$. Так как OK – средняя линия треугольника ABC, то $BC=2\cdot OK=2R=AB$, откуда вытекает, что ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник и $\angle ACB=45^\circ$. Аналогично доказывается, что BAD – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой BD.

Пусть M – точка касания сферы с ребром CD. Треугольник CDO – равнобедренный (т.к. отрезки CO и DO – это соответствующие медианы равных треугольников BAC и BAD), OM – его высота, а значит, и медиана. Из равенства треугольников COB и COM получаем, что $CM=CB=2R$, следовательно, $CD=4R=4\sqrt{3}$

Опустим из вершины D высоту DH на плоскость ABC. Тогда точка H лежит на прямой, проходящей через точку A параллельно CB. Пусть $DH=h$, $AH=x$. По теореме Пифагора из треугольников ADH и CDH получаем

$$x^2+h^2=4R^2,\ (x+2R)^2+(2R)^2+h^2=(4R)^2.$$

Решая эти уравнения, находим, что $x=R$, $h=R\sqrt{3}$.

Тогда объём V пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot 2R^2=\frac{2R^3}{\sqrt{3}}=6$.

1. Решите уравнение $\log_{x^2+1}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)=\log_{2x+4}\left(5-4^{x^2+3x-9}\right)$.

Ответ. $x=2, x=-1$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+1=2x+4, \\ 5-4^{x^2+3x-9}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-3=0, \\ x^2+3x-9=1. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $x=3$ или $x=-1$; из второго уравнения $x=2$ или $x=-5$. ОДЗ удовлетворяют только значения $x=2$ и $x=-1$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\cos x\cdot\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)}{8\cos^2 x+6\sin^2 x-7}-\dfrac{\cos x\cdot\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{7-6\cos^2 x-8\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x}{2}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos 2x}-\frac{\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos 2x}=\frac{\sqrt{3}\sin 2x}{2\cos 2x},$$

$$\cos x\cdot\left(\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x,$$

$$\cos x\cdot\left(-\sqrt{3}\cos x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x$$

откуда $\cos x=0$ или $\mathrm{tg}\,x=-1$, т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. Условию $\cos 2x\neq 0$ удовлетворяют только значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2+y^2+4xy=4x+2y+3, \\ \sqrt{6x+3y}+xy=4. \end{cases}$

Ответ. $(1;1)$, $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Решение. Первое уравнение можно переписать в виде $(2x+y)^2-2(2x+y)-3=0$, откуда следует, что $2x+y=3$ или $2x+y=-1$. Если $2x+y=-1$, то подкоренное выражение во втором уравнении отрицательно и система не имеет решений. Если $2x+y=3$, то второе уравнение принимает вид $3+x(3-2x)=4$, откуда $x=1$ или $x=\dfrac{1}{2}$.

В итоге получаем два решения – пары чисел $(1;1)$ и $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω радиуса $\sqrt{5}$, центр O которой лежит на диагонали BD, касается отрезков BC, CD и AD в точках M, N и K соответственно. Известно, что $BD=10$, а четырёхугольник $KOBA$ вписан в окружность Ω. Найдите угол COB, площадь трапеции $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ. $\angle COB=90^\circ$, $S=\dfrac{75}{2}$, $r=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Решение. Окружность вписана в углы C и D трапеции, следовательно, её центр лежит на пересечении биссектрис этих углов. Поскольку угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых равен 90°, получаем $\angle COB = \angle COD = 90^\circ$.

Треугольник DBC равнобедренный, так как CO является его высотой и биссектрисой. Значит, CO также является медианой, поэтому $DO = BO = 5$. Пусть $\angle CBD = \angle BDA = \angle BDC = \gamma$. Из прямоугольного треугольника MOB находим, что $BM = 2\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Поскольку вокруг четырёхугольника $KOBA$ можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle OBA = 90^\circ$. Из прямоугольного треугольника ABD находим, что $AD = \frac{BD}{\cos\gamma} = 5\sqrt{5}$, $AB = AD \cdot \sin\gamma = 5$. Из треугольника BOC получаем, что $BC = \frac{BO}{\cos\gamma} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Находим площадь трапеции: $S = \frac{1}{2} MK \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{15\sqrt{5}}{2} = \frac{75}{2}$.

Отрезок OA является диаметром окружности Ω. Из треугольника AOB получаем, что $OA^2 = BO^2 + AB^2 = 25 + 25 = 50$; $OD = 5\sqrt{2}$. Следовательно, радиус r окружности Ω равен $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^5 y^2 = 45^{40} \cdot 10^{22}$?

Ответ. 189.

Решение. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа x и y можно записать как $x = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 2^\gamma$, $y = 3^\lambda \cdot 5^\mu \cdot 2^\nu$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид $3^{5\alpha+2\lambda} \cdot 5^{5\beta+2\mu} \cdot 2^{5\gamma+2\nu} = 3^{80} \cdot 5^{62} \cdot 2^{22}$, что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\lambda = 80, \\ 5\beta + 2\mu = 62, \\ 5\gamma + 2\nu = 22. \end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\alpha \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$, $\beta \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, $\gamma \in \{0; 2; 4\}$. Получаем девять вариантов для первого уравнения, семь вариантов для второго и три для третьего. В итоге $9 \cdot 7 \cdot 3 = 189$ решений.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 4 \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{24+2x-x^2}} + \frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{2x+3}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in (-4; -\pi) \cup \left(-\pi; -\frac{3}{2}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{6}; 1; \frac{7\pi}{6}\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Первое неравенство равносильно следующему:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 4 \le 2, \quad \left(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\right)^2 \le 0, \quad \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

Рассмотрим неравенство $\frac{2x+3}{\sqrt{24+2x-x^2}} + \frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{2x+3} \le 2$.

В его левой части записана сумма двух взаимно обратных чисел. Она не превосходит двух в одном из двух случаев:

а) каждое из чисел отрицательно, т.е. $\frac{2x+3}{\sqrt{24+2x-x^2}}<0$, откуда $x\in\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$;

б) каждое из чисел равно единице, т.е. $\frac{2x+3}{\sqrt{24+2x-x^2}}=1$, откуда $4x^2+12x+9=24+2x-x^2$,

$x^2+2x-3=0$, $x=1$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\neq\pi m, m\in\mathrm{Z}$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in(-4;6)\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, получаем, что $x\in(-4;-\pi)\cup\left(-\pi;-\frac{3}{2}\right)\cup\left\{\frac{\pi}{6};1;\frac{7\pi}{6}\right\}$.

7. Даны пирамида $ABCD$ и сфера. Ребро AC пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся рёбер лежат на сфере. Найдите угол ABC, длину ребра BD и объём пирамиды $ABCD$, если $AC=6$.

Ответ. $\angle ABC=45^\circ$, $BD=12$, $V=18\sqrt{3}$.

Решение. Предположим, что сфера касается прямых AB и AD. Тогда AC перпендикулярно плоскости ABD, поэтому сфера имеет единственную общую точку A с плоскостью ABD, и значит, не имеет общих точек с ребром BD. С прямыми CA, CB, CD сфера будет иметь по две точки пересечения, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что сфера не может касаться одновременно рёбер BC и CD.

Значит, сфера касается ровно одной из двух прямых AB или AD – пусть, для определённости, ребра AD. Тогда сфера также касается прямых BC и BD и проходит через середины K и L рёбер AB и CD соответственно.

Из касания сферы с прямой BC следует, что $BC\perp AC$. Так как OK – средняя линия треугольника ABC, то $BC=2\cdot OK=2R=AC$, откуда вытекает, что ABC – прямоугольный равнобедренный треугольник и $\angle ACB=45^\circ$. Аналогично доказывается, что ACD – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой CD.

Пусть M – точка касания сферы с ребром BD. Треугольник BDO – равнобедренный (т.к. отрезки BO и DO – это соответствующие медианы равных треугольников BAC и DAC), OM – его высота, а значит, и медиана. Из равенства треугольников COB и MOB получаем, что $CM=CB=2R$, следовательно, $CD=4R=12$.

Опустим из вершины D высоту DH на плоскость ABC. Тогда точка H лежит на прямой, проходящей через точку A параллельно CB. Пусть $DH=h$, $AH=x$. По теореме Пифагора из треугольников ADH и BDH получаем

$$x^2+h^2=4R^2,\ (x+2R)^2+(2R)^2+h^2=(4R)^2.$$

Решая эти уравнения, находим, что $x=R$, $h=R\sqrt{3}$.

Тогда объём V пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{3}\cdot R\sqrt{3}\cdot 2R^2=\frac{2R^3}{\sqrt{3}}=18\sqrt{3}$.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^3+3xy+3y^2=16, \\ x^3-x^2+xy+2y^2=8. \end{cases}$

Ответ. $(2;-2)$, $(-1;-2)$, $\left(-4-2\sqrt{6};-8-4\sqrt{6}\right)$, $\left(-4+2\sqrt{6};-8+4\sqrt{6}\right)$.

Решение. Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получаем $2x^2+xy-y^2=0$, откуда $y=2x$ или $y=-x$.

Если $y=-x$, то из первого уравнения следует, что $2x^3=16$, поэтому $x=2$, $y=-2$.

Если $y=2x$, то первое уравнение системы принимает вид $2x^3+18x^2-16=0$, откуда $x=-1$ или $x=-4\pm 2\sqrt{6}$. В итоге получаем три решения – пары чисел $(-1;-2)$, $\left(-4-2\sqrt{6};-8-4\sqrt{6}\right)$, $\left(-4+2\sqrt{6};-8+4\sqrt{6}\right)$.

2. Решите уравнение $\sqrt{3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}+\operatorname{tg} 2x\right)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in \mathrm{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\sqrt{3}\left(\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}-\frac{2\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}\right)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x},$$

$$\sqrt{3}(\sin x(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x)=\cos x(\sin x-\cos x),$$

$$\sqrt{3}\sin x(\sin x-\cos x)=\cos x(\sin x-\cos x).$$

У последнего уравнения можем сократить обе части на $\sin x-\cos x$, так как из ОДЗ следует, что $\sin x-\cos x\neq 0$. В итоге получаем уравнение $\sqrt{3}\sin x=\cos x$, откуда $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in \mathrm{Z}$. Эти корни входят в ОДЗ.

3. Решите уравнение $\log_{6x-5}\left(6x^2-11x+5\right)\cdot\log_{x-1}\left(x^3-1\right)=\log_{6x-5}\left(6x^2-11x+5\right)+\log_{x-1}\left(x^3-1\right)$.

Ответ. $x=3$.

Решение. Заметим, что $\log_{6x-5}\left(6x^2-11x+5\right)=1+\log_{6x-5}(x-1)$, $\log_{x-1}\left(x^3-1\right)=1+\log_{x-1}\left(x^2+x+1\right)$.

Если обозначить $u=\log_{6x-5}(x-1)$, $v=\log_{x-1}\left(x^2+x+1\right)$, то уравнение принимает вид $(u+1)(v+1)=(u+1)+(v+1)\Leftrightarrow uv=1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем: $\log_{x-1}\left(x^2+x+1\right)\cdot\log_{6x-5}(x-1)=1$, откуда $\log_{6x-5}\left(x^2+x+1\right)=1$, $x^2-5x+6=0$, $x=2$ или $x=3$. В ОДЗ входит только корень $x=3$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BCD=90^\circ$. На стороне CD выбрана точка K. Окружность ω радиуса 2, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и касается прямой AB. Известно, что четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{13}$. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. $AB=6, \angle BAD=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}=\arccos\dfrac{4}{5}, S=\dfrac{432}{25}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q, а радиусы – через R и r соответственно.

Прямоугольный треугольник BCK с прямым углом при вершине C вписан в окружность ω, следовательно, сторона BK, лежащая напротив прямого угла, является диаметром этой окружности. Прямая AB касается окружности ω – значит, у окружности и прямой единственная общая точка, и это точка B., т.е. B является точкой касания. Прямая AB перпендикулярна диаметру, проведённому в точку касания, поэтому угол ABK – прямой.

Так как четырёхугольник $ABKD$ списан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle ADC = 90^\circ$, отрезок AK является диаметром окружности Ω, а четырёхугольник $ABCD$ – это прямоугольная трапеция.

В прямоугольном треугольнике ABK известно, что $AK = 2R = 2\sqrt{13}$, $BK = 2r = 4$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 6$. Окружность ω вписана в угол DAB, поэтому её центр Q лежит на биссектрисе этого угла. Значит, $\angle BAD = 2\cdot\angle BAQ = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Тогда $\cos\angle BAD = \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{4}{5}$, $\sin\angle BAD = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{3}{5}$.

Обозначим $\angle BAD = \gamma$. Тогда $\angle CBA = 180^\circ - \gamma$, $\angle CBK = \angle CBA - 90^\circ = 90^\circ - \gamma$, $\angle CKB = 90^\circ - \angle CBK = \gamma$. Из треугольника CBK находим, что $CB = BK\sin\gamma = \frac{12}{5}$. Опустим из точки B высоту BH на сторону AD. Тогда из треугольника ABH получаем: $AH = AB\cos\gamma = \frac{24}{5}$, $BH = AB\sin\gamma = \frac{18}{5}$. Тогда площадь S трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AD+BC)BH = \frac{1}{2}(2BC+AH)BH = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{5}\cdot\frac{18}{5} = \frac{432}{25}$.

5. Есть семь карточек с цифрами 0; 1; 2; 3; 3; 4; 5. Сколько существует различных *шестизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

Ответ. 276.

Решение. Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо ноль, либо тройку.

Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0.

Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 3, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые пять мест в произвольном порядке надо расставить цифры 1; 2; 3; 4; 5, что можно сделать $5! = 120$ способами.

б) Отбрасываем цифру 3, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые пять мест надо расставить цифры 0; 1; 2; 3; 4. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок пяти цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчёта нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками четырёх цифр, находящихся на втором – пятом местах. В итоге получаем $5! - 4! = 96$ способов.

в) Отбрасываем цифру 0, на последнее место ставим 5. Тогда на оставшиеся 5 мест надо расставить цифры 1; 2; 2; 3; 4. Это можно сделать $\frac{5!}{2} = 60$ способами.

В итоге получаем $120 + 96 + 60 = 276$ способов.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{28+3x-x^2}+2x+2}{1+x}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in \left[-4; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \{0; \pi; 2\pi; 7\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{28+3x-x^2}+2x+2}{x+1}\le 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{28+3x-x^2}}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}28+3x-x^2=0,\\ x+1\ne 0,\end{cases}\\ \begin{cases}28+3x-x^2>0,\\ x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=7,\\ -4<x<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-4;-1)\cup\{7\}.$$

Функция $f(x)$ представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел. Она не превосходит двух только в одном случае – если каждое из чисел равно единице. Таким образом, неравенство $f(x)\le 2$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{4}\right)=1$, откуда $\frac{\pi\cos x}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$, $\cos x=1+2k, k\in Z$. Учитывая, что $-1\le\cos x\le 1$, получаем, что решения есть только при $k=-1$ и $k=0$, и эти решения задаются формулой $x=\pi l, l\in Z$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\ne\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in[-4;7]\setminus\{-1\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, находим, что $x\in\left[-4;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-1\right)\cup\{0;\pi;2\pi;7\}$.

7. В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH. Известно, что $AB>BC$, $AB>AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, и её радиус равен 3.

а) Найдите длину ребра AB и угол ACB.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину C и середину ребра SA, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ. $AB=12, \angle ACB=90^\circ, V=36\sqrt{3}$.

Решение. а) Поскольку сфера построена на высоте пирамиды как на диаметре, она касается плоскости основания ABC. Значит, сфера имеет с плоскостью ABC ровно одну общую точку H и эта точка является серединой одного из рёбер. Поскольку сфера проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, она также пересекает отрезки SA, SB, SC в их серединах – точках K, L, M соответственно.

Из касания сферы с плоскостью ABC следует, что $AH\perp SH$, $BH\perp SH$, $CH\perp SH$. Значит, треугольники AHS, BHS и CHS прямоугольные. Отрезки OK, OL, OM являются их средними линиями. Следовательно, $AH=2\cdot OK=2R$, $BH=2R$, $CH=2R$. По теореме Пифагора находим, что $SA=SB=SC=2R\sqrt{2}$.

Предположим, что $H\in BC$. Тогда получаем, что в треугольнике ABC медиана AH равна половине той стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом при вершине A, т.е. отрезок BC является его самой длинной стороной, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что H не может принадлежать AC. Поэтому $H\in AB$. Значит, $AB=AH+HB=4R=12$, $\angle ACB=90^\circ$.

б) Прямые CH и CK – это две касательные к сфере, проведённые из одной точки. Следовательно, $CK=CH=2R$. По формуле для медианы в треугольнике SAC получаем уравнение $4KC^2+SA^2=2SC^2+2AC^2$, т.е. $16R^2+8R^2=2\cdot 8R^2+2BC^2$, откуда $AC=2R$. По теореме Пифагора из треугольника ABC находим, что $BC=2R\sqrt{3}$. Значит, объём пирамиды V равен $\frac{1}{3}\cdot 2R\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\sqrt{3}=\frac{4R^3}{\sqrt{3}}=36\sqrt{3}$.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$

Ответ. $(1; -1)$, $(-2; 1)$, $\left(\sqrt{5} - 1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5} - 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получаем $-x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$, откуда $x = -2y$ или $x = -y$.

Если $x = -y$, то из первого уравнения следует, что $y^3 + 1 = 0$, поэтому $x = 1$, $y = -1$.

Если $x = -2y$, то первое уравнение системы принимает вид $2y^3 - 4y^2 + 2 = 0$, откуда $y = 1$ или $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. В итоге получаем три решения – пары чисел $(-2; 1)$, $\left(\sqrt{5} - 1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5} - 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\sin x - \cos x}$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} - \frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \sqrt{3} \frac{\sin x}{\sin x - \cos x},$$

$$\cos x(\sin x - \cos x) - 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x(\sin x + \cos x),$$

$$-\cos x(\sin x + \cos x) = \sqrt{3} \sin x(\sin x + \cos x).$$

У последнего уравнения можем сократить обе части на $\sin x + \cos x$, так как из ОДЗ следует, что $\sin x + \cos x \neq 0$. В итоге получаем уравнение $-\cos x = \sqrt{3} \sin x$, откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$.

Эти корни входят в ОДЗ.

3. Решите уравнение $\log_{7x-6}\left(7x^2 + x - 6\right) \cdot \log_{x+1}\left(x^3 + 1\right) = \log_{7x-6}\left(7x^2 + x - 6\right) + \log_{x+1}\left(x^3 + 1\right)$.

Ответ. $x = 7$.

Решение. Заметим, что $\log_{7x-6}\left(7x^2 + x - 6\right) = 1 + \log_{7x-6}(x+1)$, $\log_{x+1}\left(x^3 + 1\right) = 1 + \log_{x+1}\left(x^2 - x + 1\right)$.

Если обозначить $u = \log_{7x-6}(x+1)$, $v = \log_{x+1}\left(x^2 - x + 1\right)$, то уравнение принимает вид $(u+1)(v+1) = (u+1) + (v+1) \Leftrightarrow uv = 1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем: $\log_{x+1}\left(x^2 - x + 1\right) \cdot \log_{7x-6}(x+1) = 1$, откуда $\log_{7x-6}\left(x^2 - x + 1\right) = 1$, $x^2 - 8x + 7 = 0$, $x = 1$ или $x = 7$. В ОДЗ входит только корень $x = 7$.

4. Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{37}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 6, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и касается прямой AB. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. $AB = 2, \angle BAD = 2 \operatorname{arctg} 3 = \pi - \arccos \frac{4}{5}, S = \frac{192}{25}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q, а радиусы – через R и r соответственно.

Прямоугольный треугольник BCK с прямым углом при вершине C вписан в окружность ω, следовательно, сторона BK, лежащая напротив прямого угла, является диаметром этой окружности. Прямая AB касается окружности ω – значит, у окружности и прямой единственная общая точка, и это точка B., т.е. B является точкой касания. Прямая AB перпендикулярна диаметру, проведённому в точку касания, поэтому угол ABK – прямой.

Так как четырёхугольник $ABKD$ списан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle ADK = 90^\circ$, отрезок AK является диаметром окружности Ω, а четырёхугольник $ABCD$ – это прямоугольная трапеция.

В прямоугольном треугольнике ABK известно, что $AK = 2R = 2\sqrt{37}$, $BK = 2r = 12$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 2$. Окружность ω вписана в угол DAB, поэтому её центр Q лежит на биссектрисе этого угла. Значит, $\angle BAD = 2\cdot\angle BAQ = 2\operatorname{arctg}3$. Тогда $\cos\angle BAD = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}$, $\sin\angle BAD = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \frac{3}{5}$.

Обозначим $\angle BAD = \gamma$. Тогда $\angle CBA = 180^\circ - \gamma$, $\angle CKB = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \gamma$. Из треугольника CBK находим, что $CB = BK\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{36}{5}$. Опустим из точки A высоту AH на сторону BC. Тогда из треугольника ABH получаем: $AH = AB\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{6}{5}$, $BH = AB\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{8}{5}$. Тогда площадь S трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AD+BC)AH = \frac{1}{2}(2BC - BH)AH = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{5}\cdot\frac{6}{5} = \frac{192}{25}$.

5. Есть восемь карточек с цифрами 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 8. Сколько существует различных *семизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

Ответ. 1680 .

Решение. Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо восьмёрку, либо пятёрку.

Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0.

Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 8, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые шесть мест в произвольном порядке надо расставить цифры 3; 4; 5; 6; 7; 8, что можно сделать $6! = 720$ способами.

б) Отбрасываем цифру 8, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые шесть мест надо расставить цифры 0; 3; 4; 6; 7; 8. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок шести цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчёта нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками пяти цифр, находящихся на втором – шестом местах. В итоге получаем $6! – 5! = 600$ способов.

в) Отбрасываем цифру 5, на последнее место ставим 0. Тогда на оставшиеся 6 мест надо расставить цифры 3; 4; 6; 7; 8; 8. Это можно сделать $\frac{6!}{2} = 360$ способами.

В итоге получаем $720 + 600 + 360 = 1680$ способов.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{2\sqrt{2}}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{15 - 2x - x^2} + 2x + 4}{2 + x}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in \left[-5; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}; -2\right) \cup \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; 3\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{15-2x-x^2}+2x+4}{x+2} \le 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15-2x-x^2}}{x+2} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 15-2x-x^2=0, \\ x+2\neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 15-2x-x^2>0, \\ x+2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=3, \\ -5<x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-5;-2)\cup\{3\}.$$

Функция $f(x)$ представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел. Она не превосходит двух только в одном случае – если каждое из чисел равно единице. Таким образом, неравенство $f(x)\le 2$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\cos x}{2\sqrt{2}}\right)=1$, откуда $\frac{\pi\cos x}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$, $\cos x=\frac{1+2k}{\sqrt{2}}, k\in Z$. Учитывая, что $-1\le\cos x\le 1$, получаем, что решения есть только при $k=-1$ и $k=0$, и эти решения задаются формулой $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}, l\in Z$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in[-5;3]\setminus\{-2\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, находим, что $x\in\left[-5;-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{2};-2\right)\cup\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};3\right\}$.

7. В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH. Известно, что $SH=6$, $AC>BC$, $AB<AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды.

а) Найдите длину ребра AC и угол ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину B и середину ребра SC, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ. $AC=12, \angle ABC=90^\circ, V=36\sqrt{3}$.

Решение. а) Поскольку сфера построена на высоте пирамиды как на диаметре, она касается плоскости основания ABC. Значит, сфера имеет с плоскостью ABC ровно одну общую точку H и эта точка является серединой одного из рёбер. Поскольку сфера проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, она также пересекает отрезки SA, SB, SC в их серединах – точках K, L, M соответственно.

Из касания сферы с плоскостью ABC следует, что $AH\perp SH$, $BH\perp SH$, $CH\perp SH$. Значит, треугольники AHS, BHS и CHS прямоугольные. Отрезки OK, OL, OM являются их средними линиями. Следовательно, $AH=2\cdot OK=2R$, $BH=2R$, $CH=2R$. По теореме Пифагора находим, что $SA=SB=SC=2R\sqrt{2}$.

Предположим, что $H\in BC$. Тогда получаем, что в треугольнике ABC медиана AH равна половине той стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом при вершине A, т.е. отрезок BC является его самой длинной стороной, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что H не может принадлежать AB. Поэтому $H\in AC$. Значит, $AC=AH+HC=4R=12$, $\angle ABC=90^\circ$.

б) Прямые BH и BL – это две касательные к сфере, проведённые из одной точки. Следовательно, $BL=BH=2R$. По формуле для медианы в треугольнике SBC получаем уравнение $4BM^2+SC^2=2SB^2+2BC^2$, т.е. $16R^2+8R^2=2\cdot 8R^2+2BC^2$, откуда $BC=2R$. По теореме Пифагора из треугольника ABC находим, что $AB=2R\sqrt{3}$. Значит, объём пирамиды V равен $\frac{1}{3}\cdot 2R\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\sqrt{3}=\frac{4R^3}{\sqrt{3}}=36\sqrt{3}$.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+x^2+xy-2y^2+8=0, \\ 2x^3+3xy-3y^2+16=0. \end{cases}$

Ответ. $(-2;-2)$, $(1;-2)$, $(4+2\sqrt{6};-8-4\sqrt{6})$, $(4-2\sqrt{6};-8+4\sqrt{6})$.

Решение. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получаем $-2x^2+xy+y^2=0$, откуда $y=x$ или $y=-2x$.

Если $y=x$, то из первого уравнения следует, что $x^3=-8$, поэтому $x=-2$, $y=-2$.

Если $y=-2x$, то первое уравнение системы принимает вид $x^3-9x^2+8=0$, откуда $x=1$ или $x=4\pm 2\sqrt{6}$.

В итоге получаем три решения – пары чисел $(1;-2)$, $(4+2\sqrt{6};-8-4\sqrt{6})$, $(4-2\sqrt{6};-8+4\sqrt{6})$.

2. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x+\cos x}=\operatorname{tg}2x+\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sin x+\cos x}=-\frac{2\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}+\frac{\sin x}{\sin x-\cos x},$$

$$\sqrt{3}\cos x(\sin x-\cos x)=-2\sin x\cos x+\sin x(\sin x+\cos x),$$

$$\sqrt{3}\cos x(\sin x-\cos x)=\sin x(\sin x-\cos x).$$

У последнего уравнения можем сократить обе части на $\sin x-\cos x$, так как из ОДЗ следует, что $\sin x-\cos x\neq 0$. В итоге получаем уравнение $\sqrt{3}\cos x=\sin x$, откуда $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. Эти корни входят в ОДЗ.

3. Решите уравнение $\log_{9x-8}\left(9x^2-26x+16\right)\cdot\log_{x-2}\left(x^3-8\right)=\log_{9x-8}\left(9x^2-26x+16\right)+\log_{x-2}\left(x^3-8\right)$.

Ответ. $x=4$.

Решение. Заметим, что $\log_{9x-8}\left(9x^2-26x+16\right)=1+\log_{9x-8}(x-2)$, $\log_{x-2}\left(x^3-8\right)=1+\log_{x-2}\left(x^2+2x+4\right)$.

Если обозначить $u=\log_{9x-8}(x-2)$, $v=\log_{x-2}\left(x^2+2x+4\right)$, то уравнение принимает вид $(u+1)(v+1)=(u+1)+(v+1)\Leftrightarrow uv=1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем: $\log_{x-2}\left(x^2+2x+4\right)\cdot\log_{9x-8}(x-2)=1$, откуда $\log_{9x-8}\left(x^2+2x+4\right)=1$, $x^2-7x+12=0$, $x=4$ или $x=3$. В ОДЗ входит только корень $x=4$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle BCD=90^\circ$. На стороне CD выбрана точка K. Окружность ω радиуса $\sqrt{5}$, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и касается прямой AB. Известно, что четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса 5. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. $AB=4\sqrt{5}, \angle BAD=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}=\arccos\dfrac{15}{17}, S=\dfrac{7360}{289}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q, а радиусы – через R и r соответственно.

Прямоугольный треугольник BCK с прямым углом при вершине C вписан в окружность ω, следовательно, сторона BK, лежащая напротив прямого угла, является диаметром этой окружности. Прямая AB касается окружности ω – значит, у окружности и прямой единственная общая точка, и это точка B., т.е. B является точкой касания. Прямая AB перпендикулярна диаметру, проведённому в точку касания, поэтому угол ABK – прямой.

Так как четырёхугольник $ABKD$ списан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle ADC=90^\circ$, отрезок AK является диаметром окружности Ω, а четырёхугольник $ABCD$ – это прямоугольная трапеция.

В прямоугольном треугольнике ABK известно, что $AK = 2R = 10$, $BK = 2r = 2\sqrt{5}$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 4\sqrt{5}$. Окружность ω вписана в угол DAB, поэтому её центр Q лежит на биссектрисе этого угла. Значит, $\angle BAD = 2\cdot\angle BAQ = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}$. Тогда $\cos\angle BAD = \frac{1-1/16}{1+1/16} = \frac{15}{17}$, $\sin\angle BAD = \frac{2\cdot 1/4}{1+1/16} = \frac{8}{17}$.

Обозначим $\angle BAD = \gamma$. Тогда $\angle BKD = 180^\circ - \gamma$, $\angle CKB = 180^\circ - \angle BKD = \gamma$. Из треугольника CBK находим, что $CB = BK\sin\gamma = \frac{16\sqrt{5}}{17}$. Опустим из точки B высоту BH на сторону AD. Тогда из треугольника ABH получаем: $AH = AB\cos\gamma = \frac{60\sqrt{5}}{17}$, $BH = AB\sin\gamma = \frac{32\sqrt{5}}{17}$. Тогда площадь S трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AD+BC)BH = \frac{1}{2}(2BC+AH)BH = \frac{1}{2}\cdot\frac{92\sqrt{5}}{17}\cdot\frac{32\sqrt{5}}{17} = \frac{432}{25} = \frac{7360}{289}$.

5. Есть семь карточек с цифрами 0; 1; 2; 2; 3; 4; 5. Сколько существует различных *шестизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

Ответ. 276 .

Решение. Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо двойку, либо пятёрку.

Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0.

Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые пять мест в произвольном порядке надо расставить цифры 1; 2; 3; 4; 5, что можно сделать $5! = 120$ способами.

б) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые пять мест надо расставить цифры 0; 1; 2; 3; 4. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок пяти цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчёта нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками четырёх цифр, находящихся на втором – пятом местах. В итоге получаем $5! - 4! = 96$ способов.

в) Отбрасываем цифру 5, на последнее место ставим 0. Тогда на оставшиеся 5 мест надо расставить цифры 1; 2; 2; 3; 4. Это можно сделать $\frac{5!}{2} = 60$ способами.

В итоге получаем $120 + 96 + 60 = 276$ способов.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{4}\right) + \mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{4}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{32+4x-x^2} + 2x - 2}{x-1}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in [-4; -\pi) \cup (-\pi; 0) \cup (0; 1) \cup \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; 8\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{32+4x-x^2}+2x-2}{x-1}\le 2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{32+4x-x^2}}{x-1}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}32+4x-x^2=0,\\ x-1\ne 0,\end{cases}\\ \begin{cases}32+4x-x^2>0,\\ x-1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=8,\\ x=-4,\\ -4<x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-4;1)\cup\{8\}.$$

Функция $f(x)$ представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел. Она не превосходит двух только в одном случае – если каждое из чисел равно единице. Таким образом, неравенство $f(x)\le 2$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{4}\right)=1$, откуда $\frac{\pi\sin x}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$, $\sin x=\frac{1+2k}{\sqrt{2}}, k\in Z$. Учитывая, что $-1\le\sin x\le 1$, получаем, что решения есть только при $k=-1$ и $k=0$, и эти решения задаются формулой $x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in Z$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\ne\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in[-4;8]\setminus\{1\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, находим, что $x\in[-4;-\pi)\cup(-\pi;0)\cup(0;1)\cup\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2};8\right\}$.

7. В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH. Известно, что $AC>BC$, $AB<AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, и её радиус равен $\sqrt{3}$.

а) Найдите длину ребра AC и угол ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину B и середину ребра SA, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ. $AC=4\sqrt{3}, \angle ABC=90^\circ, V=12$.

Решение. а) Поскольку сфера построена на высоте пирамиды как на диаметре, она касается плоскости основания ABC. Значит, сфера имеет с плоскостью ABC ровно одну общую точку H и эта точка является серединой одного из рёбер. Поскольку сфера проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, она также пересекает отрезки SA, SB, SC в их серединах – точках K, L, M соответственно.

Из касания сферы с плоскостью ABC следует, что $AH\perp SH$, $BH\perp SH$, $CH\perp SH$. Значит, треугольники AHS, BHS и CHS прямоугольные. Отрезки OK, OL, OM являются их средними линиями. Следовательно, $AH=2\cdot OK=2R$, $BH=2R$, $CH=2R$. По теореме Пифагора находим, что $SA=SB=SC=2R\sqrt{2}$.

Предположим, что $H\in BC$. Тогда получаем, что в треугольнике ABC медиана AH равна половине той стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом при вершине A, т.е. отрезок BC является его самой длинной стороной, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что H не может принадлежать AB. Поэтому $H\in AC$. Значит, $AC=AH+HC=4R=4\sqrt{3}$, $\angle ABC=90^\circ$.

б) Прямые BH и BK – это две касательные к сфере, проведённые из одной точки. Следовательно, $BK=BH=2R$. По формуле для медианы в треугольнике SBA получаем уравнение $4BK^2+SA^2=2SB^2+2AB^2$, т.е. $16R^2+8R^2=2\cdot 8R^2+2AB^2$, откуда $AB=2R$. По теореме Пифагора из треугольника ABC находим, что $BC=2R\sqrt{3}$. Значит, объём пирамиды V равен $\frac{1}{3}\cdot 2R\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\sqrt{3}=\frac{4R^3}{\sqrt{3}}=12$.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^3 + x^2 - xy = 1, \\ 2y^3 + x^2 + xy - 2y^2 = 2. \end{cases}$

Ответ. $(1;1)$, $(-2;-1)$, $\left(-1-\sqrt{5}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{5}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение. Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получаем $-x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$, откуда $x = y$ или $x = 2y$.

Если $x = y$, то из первого уравнения следует, что $y^3 = 1$, поэтому $y = 1$, $x = 1$.

Если $x = 2y$, то первое уравнение системы принимает вид $y^3 + 2y^2 - 1 = 0$, откуда $y = -1$ или $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. В итоге получаем три решения – пары чисел $(-2;-1)$, $\left(-1-\sqrt{5}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(-1+\sqrt{5}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{3}\left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \operatorname{tg} 2x\right)$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sin x}{\sin x - \cos x} = \sqrt{3}\left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} - \frac{2\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}\right),$$

$$\sin x(\sin x + \cos x) = \sqrt{3}(\cos x(\sin x - \cos x) - 2\sin x \cos x),$$

$$\sin x(\sin x + \cos x) = -\sqrt{3}\cos x(\sin x + \cos x).$$

У последнего уравнения можем сократить обе части на $\sin x + \cos x$, так как из ОДЗ следует, что $\sin x + \cos x \neq 0$. В итоге получаем уравнение $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$, откуда $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathrm{Z}$. Эти корни входят в ОДЗ.

3. Решите уравнение $\log_{2x+9}\left(2x^2 + 13x + 18\right) \cdot \log_{x+2}\left(x^3 + 8\right) = \log_{2x+9}\left(2x^2 + 13x + 18\right) + \log_{x+2}\left(x^3 + 8\right)$.

Ответ. $x = 5$.

Решение. Заметим, что $\log_{2x+9}\left(2x^2 + 13x + 18\right) = 1 + \log_{2x+9}(x+2)$, $\log_{x+2}\left(x^3 + 8\right) = 1 + \log_{x+2}\left(x^2 - 2x + 4\right)$.

Если обозначить $u = \log_{2x+9}(x+2)$, $v = \log_{x+2}\left(x^2 - 2x + 4\right)$, то уравнение принимает вид $(u+1)(v+1) = (u+1) + (v+1) \Leftrightarrow uv = 1$.

Возвращаясь к исходным переменным, получаем: $\log_{x+2}\left(x^2 - 2x + 4\right) \cdot \log_{2x+9}(x+2) = 1$, откуда $\log_{2x+9}\left(x^2 - 2x + 4\right) = 1$, $x^2 - 4x - 5 = 0$, $x = 5$ или $x = -1$. В ОДЗ входит только корень $x = 5$.

4. Четырёхугольник $ABKD$ вписан в окружность Ω радиуса $\sqrt{17}$. На стороне KD выбрана точка C так, что $\angle BCD = 90^\circ$. Окружность ω радиуса 4, описанная вокруг треугольника BCK, касается отрезка AD и касается прямой AB. Найдите длину отрезка AB, угол BAD и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. $AB = 2, \angle BAD = 2\operatorname{arctg} 2 = \pi - \arccos\frac{3}{5}, S = \frac{232}{25}$.

Решение. Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q, а радиусы – через R и r соответственно.

Прямоугольный треугольник BCK с прямым углом при вершине C вписан в окружность ω, следовательно, сторона BK, лежащая напротив прямого угла, является диаметром этой окружности. Прямая AB касается окружности ω – значит, у окружности и прямой единственная общая точка, и это точка B., т.е. B является точкой касания. Прямая AB перпендикулярна диаметру, проведённому в точку касания, поэтому угол ABK – прямой.

Так как четырёхугольник $ABKD$ списан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно, $\angle ADK = 90^\circ$, отрезок AK является диаметром окружности Ω, а четырёхугольник $ABCD$ – это прямоугольная трапеция.

В прямоугольном треугольнике ABK известно, что $AK = 2R = 2\sqrt{17}$, $BK = 2r = 8$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 2$. Окружность ω вписана в угол DAB, поэтому её центр Q лежит на биссектрисе этого угла. Значит, $\angle BAD = 2 \cdot \angle BAQ = 2\operatorname{arctg} 2$. Тогда $\cos\angle BAD = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}$, $\sin\angle BAD = \frac{2\cdot 2}{1+4} = \frac{4}{5}$.

Обозначим $\angle BAD = \gamma$. Тогда $\angle CBA = 180^\circ - \gamma$, $\angle CKB = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \gamma$. Из треугольника CBK находим, что $CB = BK\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{32}{5}$. Опустим из точки A высоту AH на сторону BC. Тогда из треугольника ABH получаем: $AH = AB\sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{8}{5}$, $BH = AB\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = \frac{6}{5}$. Тогда площадь S трапеции $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AD + BC)AH = \frac{1}{2}(2BC - BH)AH = \frac{1}{2}\cdot\frac{58}{5}\cdot\frac{8}{5} = \frac{232}{25}$.

5. Есть восемь карточек с цифрами 0; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 6. Сколько существует различных *семизначных* чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

Ответ. 1680 .

Решение. Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5.

Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо двойку, либо пятёрку.

Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0.

Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые шесть мест в произвольном порядке надо расставить цифры 1; 2; 3; 4; 5; 6, что можно сделать $6! = 720$ способами.

б) Отбрасываем цифру 2, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые шесть мест надо расставить цифры 0; 1; 2; 3; 4; 6. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок шести цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчёта нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками пяти цифр, находящихся на втором – шестом местах. В итоге получаем $6! - 5! = 600$ способов.

в) Отбрасываем цифру 5, на последнее место ставим 0. Тогда на оставшиеся 6 мест надо расставить цифры 1; 2; 2; 3; 4; 6. Это можно сделать $\frac{6!}{2} = 360$ способами.

В итоге получаем $720 + 600 + 360 = 1680$ способов.

6. Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{2\sqrt{2}}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{\sqrt{24 + 5x - x^2} + 2x - 8}{x - 4}$$

определены, причём значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

Ответ. $x \in [-3; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; 4) \cup \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; 8\right\}$.

Решение. Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \le 2, \\ g(x) \le 2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{24+5x-x^2}+2x-8}{x-4}\le 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{24+5x-x^2}}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}24+5x-x^2=0,\\ x-4\ne 0,\end{cases}\\ \begin{cases}24+5x-x^2>0,\\ x-4<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=8,\\ -3<x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-3;4)\cup\{8\}.$$

Функция $f(x)$ представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел. Она не превосходит двух только в одном случае – если каждое из чисел равно единице. Таким образом, неравенство $f(x)\le 2$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sin x}{2\sqrt{2}}\right)=1$, откуда $\frac{\pi\sin x}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$, $\sin x=\frac{1+2k}{\sqrt{2}}, k\in Z$. Учитывая, что $-1\le\sin x\le 1$, получаем, что решения есть только при $k=-1$ и $k=0$, и эти решения задаются формулой $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}, l\in Z$.

За счёт области определения функции $f(x)$ получаем ограничение $x\ne\pi m, m\in Z$, а за счёт области определения $g(x)$ – ограничение $x\in[-3;8]\setminus\{4\}$.

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, находим, что $x\in[-3;0)\cup(0;\pi)\cup(\pi;4)\cup\left\{\frac{7\pi}{4};\frac{9\pi}{4};8\right\}$.

7. В треугольной пирамиде $SABC$ из вершины S опустили высоту SH. Известно, что $SH=2\sqrt{3}$, $AB>BC$, $AB>AC$. Сфера, построенная на отрезке SH как на диаметре, проходит через середины четырёх рёбер пирамиды.

а) Найдите длину ребра AB и угол ACB.

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину C и середину ребра SB, касается сферы. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ. $AB=4\sqrt{3}, \angle ACB=90^\circ, V=12$.

Решение. а) Поскольку сфера построена на высоте пирамиды как на диаметре, она касается плоскости основания ABC. Значит, сфера имеет с плоскостью ABC ровно одну общую точку H и эта точка является серединой одного из рёбер. Поскольку сфера проходит через середины четырёх рёбер пирамиды, она также пересекает отрезки SA, SB, SC в их серединах – точках K, L, M соответственно.

Из касания сферы с плоскостью ABC следует, что $AH\perp SH$, $BH\perp SH$, $CH\perp SH$. Значит, треугольники AHS, BHS и CHS прямоугольные. Отрезки OK, OL, OM являются их средними линиями. Следовательно, $AH=2\cdot OK=2R$, $BH=2R$, $CH=2R$. По теореме Пифагора находим, что $SA=SB=SC=2R\sqrt{2}$.

Предположим, что $H\in BC$. Тогда получаем, что в треугольнике ABC медиана AH равна половине той стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом при вершине A, т.е. отрезок BC является его самой длинной стороной, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что H не может принадлежать AC. Поэтому $H\in AB$. Значит, $AB=AH+HB=4R=4\sqrt{3}$, $\angle ACB=90^\circ$.

б) Прямые CH и CL – это две касательные к сфере, проведённые из одной точки. Следовательно, $CL=CH=2R$. По формуле для медианы в треугольнике SBC получаем уравнение $4MC^2+SB^2=2SC^2+2BC^2$, т.е. $16R^2+8R^2=2\cdot 8R^2+2BC^2$, откуда $BC=2R$. По теореме Пифагора из треугольника ABC находим, что $AC=2R\sqrt{3}$. Значит, объём пирамиды V равен $\frac{1}{3}\cdot 2R\cdot\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot 2R\sqrt{3}=\frac{4R^3}{\sqrt{3}}=12$.

