

## Информация по оформлению письма

Ниже в данном документе представлены условия задач первого заочного тура открытой Всероссийской студенческой олимпиады по Прикладным математике и физике (ВСО ПМФ). Данные задачи предлагаются только тем участникам, которые не вошли в заявку вуза для участия во втором туре ВСО ПМФ. Для участия во втором туре ВСО ПМФ достаточно решить одну любую задачу из четырех разделов: физика, математика, теоретическая механика, информатика. Итоги заочного тура будут подведены на открытии второго тура ВСО ПМФ.

Решения необходимо отослать на электронную почту [olimp@phystech.edu](mailto:olimp@phystech.edu) до **22 апреля 2009 г.** В письме необходимо указать:

1. Фамилию, Имя, Отчество.
2. Полное название института и факультета, где Вы обучаетесь в настоящее время, номер курса и группы.
3. Сообщите об участии во Всероссийских школьных Олимпиадах по математике и физике (название, год, результат).
4. Не забудьте к письму приложить решения задач.

## Задачи по физике

1. Сноубордист, движущийся в горизонтальном направлении со скоростью  $\vec{V}_0$ , начинает подниматься по дуге окружности радиуса  $R = 9$  м. Определить минимальное значение  $V_0$ , при котором сноубордист поднимется на вертикальную стенку. Коэффициент трения скольжения сноуборда по дуге  $\mu = 0,1$ .

2. В зимний день температура воздуха на улице равна  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , а в помещении, где работает холодильник,  $t_1 = 1^\circ\text{C}$ . Какая максимальная температура установится в помещении, если при неизменных внешних условиях в помещении будет работать второй такой же холодильник? Температура в морозильной камере холодильника  $t_2 = -13^\circ\text{C}$ .

3. На зеркальную внутреннюю поверхность конуса с углом при вершине  $2\alpha$  падает луч света, проходящий параллельно оси конуса на расстоянии  $r$  от нее. Через какое время луч света достигнет верхней точки своей траектории, если  $\alpha = 1^\circ$ ,  $r = 10$  см?

## Задачи по математике

1. Две вещественные квадратные матрицы коммутируют, т.е.

$$AB = BA. \quad (1)$$

Доказать, что

$$\det (A^2 + B^2) \geq 0. \quad (2)$$

Верно ли утверждение (2) без условия (1)?

2. Дан многогранник  $P \subset \mathbb{R}^3$ . Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого равны длинам некоторых трех разных ребер многогранника  $P$ .

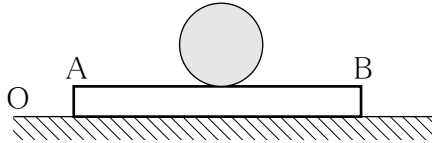
3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

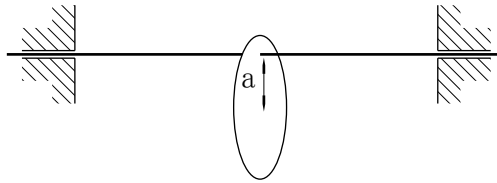
в ряд Фурье по тригонометрической системе  $1, \cos kx, \sin kx, k = 1, 2, \dots$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Построить график суммы ряда. Сходится ли ряд равномерно на интервале  $(0, \pi)$ ?

## Задачи по теоретической механике

1. Шероховатая доска  $AB$  движется вдоль горизонтальной оси по закону  $OA = a \sin(\omega t)$ . По доске может катиться без проскальзывания однородный диск массы  $m$  и радиуса  $r$ . В начальный момент диск касается доски в ее середине. При каких начальных условиях движения диска он не упадет с доски?



2. Колесо массы  $m$  может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, расположенной на расстоянии  $a$  от центра тяжести колеса. Колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$  из состояния покоя. Найти горизонтальную и вертикальную проекции динамической реакции оси через  $n$  оборотов после начала движения.



## Задачи по информатике

1. Известно, что любое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Напишите программу, которая для заданного числа  $N$  ( $1 < N < 200000000$ ) выводит разложения в сумму четырех полных квадратов следующих чисел:  $N, N + 1, N + 2, \dots, N + 100$ . Например, для  $N = 1$  программа может вывести 100 строк

```
1=0+0+0+1
2=0+0+1+1
3=
...
15=1+1+4+9
...
100=0+0+0+100
```

Для некоторых чисел есть несколько разложений, выводите просто одно из них. Числа в разложении могут повторяться. Порядок чисел в разложении неважен. Программа должна быть написана на одном из популярных языков программирования (Си, *Pascal*, Си++, *Java*, *Ruby*, *Python*), хорошо оформлена и содержать комментарии. Вход должен браться из стандартного потока данных (считывать с клавиатуры одно натуральное число  $N$ ), а результат выводиться в стандартный поток вывода (печататься на экран).

2. Рассмотрим задачу быстрого вычисления подсказок для строки поиска. Для решения этой задачи будем использовать следующий подход. Возьмем список из 10000000 частых запросов, которые были введены пользователями в строку поиска (этот список записан в виде текстового файла, в каждой строке которого указана строка поиска и частота этой строки поиска — число от 1 до 1000000) и будем для первых введенных букв искать самые частые запросы, которые начинаются на эти буквы. Ваша программа должна загружаться в память считывать файл с запросами и некоторое время обрабатывать его (строить необходимую структуру поиска), а затем быстро отвечать на запросы вычисления подсказок, а именно, для каждой введенной последовательности букв выводить самые частые 10 запросов из списка, которые начинаются на эту последовательность букв. Проблема заключается в том, что для введенных коротких последовательностей букв (длины 1, 2 или 3) есть очень много подходящих запросов (10000 или даже больше). Хотелось бы, чтобы даже для таких случаев программа вычисляющая подсказки работала быстро и была способна обработать 1000 запросов в секунду или больше. Опишите словами какие алгоритмы здесь следует использовать и какие оптимизации здесь возможны. Наличие программного кода необязательно, но приветствуется, если код является пояснением к описанию алгоритма, хорошо оформлен и снабжен комментариями.